

Г. А. Шелудько

С. В. Угримов, д-р техн. наук

Институт проблем машиностроения
им. А.Н.Подгорного НАН Украины,
г. Харьков, Украина

e-mail: sugrimov@ipmach.kharkov.ua

Ключевые слова: аппроксимация, интерполяция, кусочно-линейное приближение, трудновычислимая функция, индекс эффективности.

УДК 518: 517.9

АДАПТИВНОЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТРУДНОВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается адаптивный подход к аппроксимации непрерывной одномерной функции с использованием кусочно-линейного приближения. Применяется простой механизм адаптивного управления шаговым процессом с обратной связью. Возможности подхода рассматриваются на задачах вычисления длин кривых и значений определенных интегралов. Приведены результаты расчета определенных интегралов с разным характером подынтегральной функции, полученные предложенным методом и обычным методом трапеций. Численные результаты показали высокую эффективность предложенного адаптивного подхода.

Введение

Решение многих теоретических и прикладных задач ставит перед необходимостью одни функциональные зависимости $f(x)$ заменять другими $g(x)$, более удобными при реализации конкретной задачи. Такая замена происходит в предположении, что задается ряд требований к приближающему объекту $g(x)$, его форме и свойствам. К ним относятся: класс функций, точность приближения, вычислительные затраты, форма конечного результата и многое другое. Для описания характеристик такой замены вводится понятие критерия качества [1], который учитывает достигнутую точность по отношению к затраченным для этого вычислениям функции $f(x)$. Имеются в виду совокупные вычисления функции

$f(x)$, предварительно затраченные на анализ ее принадлежности тому или иному классу, собственно затраты на само приближение $g(x)$ к $f(x)$, а также затраты на пересчет, если сразу не удастся достичь желаемого результата. При этом априорная информация о характере (классе) исходной функции может отсутствовать, а сама функция попадать в разряд трудновычислимых. Здесь приходится пользоваться весьма условными, подчас субъективными понятиями, такими, как плохо организованные, трудновычислимые функции, иногда связанные с плохой их обусловленностью [2]. Часто это случаи, когда требуются большие вычислительные затраты для получения значения самой функции, связанные с решением больших систем дифференциальных или нелинейных конечных уравнений.

На рис. 1, 2 представлены фрагменты функций $f(x)$, заданных на сегменте $[A, B]$ и состоящих из ряда частей, каждая из которых обладает различными особенностями, которые должны учитываться при аппроксимации. При этом следует четко различать способы задания функций – координатный (рис. 1) и параметрический (рис. 2), которые могут усложнить численную реализацию.

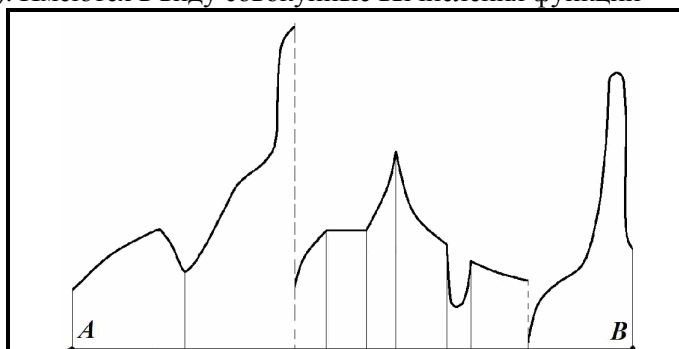


Рис. 1. Координатный способ задания функций

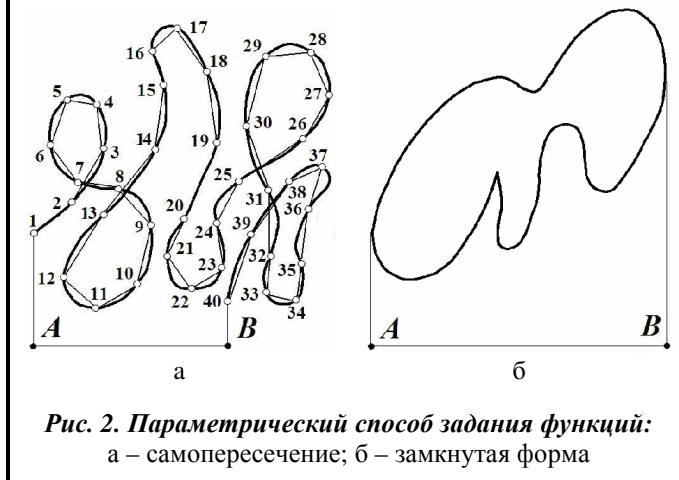


Рис. 2. Параметрический способ задания функций:
а – самопересечение; б – замкнутая форма

Согласно теореме Вейерштрасса [3–5], любая непрерывная функция $f(x)$ класса C^2 может быть сколь угодно точно равномерно приближена многочленами. Известны классические методы Ньютона или Лагранжа [2]

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i), \quad (1)$$

которые позволяют с заданной точностью ε аппроксимировать исходную функцию. При этом достигаемая точность ε зависит от количества узлов сетки

$$A = x_0, x_1, \dots, x_n = B. \quad (2)$$

Изначально сложно определить, сколько понадобится узлов (2) при аппроксимации (1), чтобы с заданной точностью ε выполнялось требование

$$R_n = |f(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [A, B]. \quad (3)$$

Поэтому сначала принимают малое число n , и если оно не устраивает, то его увеличивают. Например, в схеме L.F. Richardson [6] разделяют имеющуюся сетку дополнительными внутренними узлами, что увеличивает их количество почти вдвое (принцип С. Runge [7]). Удовлетворительность результата выясняется только после решения ряда систем уравнений. В зависимости от свойств функции $f(x)$ степень многочлена (1) может оказаться настолько большой, что даже современные ЭВМ не способны разрешить необходимую систему уравнений в разумное время. На практике часто ограничиваются не более сотней уравнений.

Подобные трудности иногда могут преодолеваются за счет специального выбора узлов интерполяции. Для этого требуется предварительный анализ аппроксимируемой функции $f(x)$ и, следовательно, дополнительные вычислительные затраты.

Погрешность интерполяции (3) может быть представлена в виде

$$R_n(x) = |f(x) - g_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x), \quad \xi \in [A, B].$$

Здесь одна часть зависит от свойств функции $f(x)$ и не подвластна регулированию, а другая – связана с распределением узлов интерполяции. Воспользовавшись этим, можно улучшить сетку (2), задав узлы согласно формуле

$$x_i = 0.5[B + A + \xi_i(B - A)], \quad (4)$$

$$\xi_i = -\cos[\pi(2i + 1)/(2n + 2)], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где ξ_i – нули полинома первого рода П.Л. Чебышева [4, 5, 8]

$$T_{n+1}(x) = \cos[(n + 1) \arccos x], \quad x \in [-1, 1].$$

Но и при таком оптимальном случае генерирования узлов (4) нельзя всегда быть уверенным, что абсолютная величина погрешности будет сколь угодно малой при достаточно больших значениях n .

Теорема G. Faber [9] утверждает, что какой бы ни была сетка узлов (2), можно подобрать такую непрерывную функцию $f(x)$ на $[A, B]$, что последовательность интерполяционных многочленов $\{g_n(x)\}$ не сойдется с $f(x)$. Конечно, для функции $f(x)$ можно добиться сходимости за счет специального расположения узлов сетки (2). Это возможно в силу теоремы J. Marcinkiewicz [10], утверждающей, что для непрерывной на $[A, B]$ функции $f(x)$ всегда найдется такая последовательность узлов, для которой соответствующий интерполяционный процесс сойдется. Но практически такие сетки чрезвычайно сложно строить, чтобы включать их в стандартный алгоритм, т. е. для каждой функции требуется своя сетка.

С. Runge в статье [7] показал, что интерполяционный процесс приближения $\{g_n(x)\}$, даже для сравнительно несложной и сколь угодно раз дифференцируемой функции $f(x) = [1 + (5x)^2]^{-1}$, не сходится на сегменте $[-1; 1]$. Позже С. Н. Бернштейн в работе [11] обратил внимание на то, что простая непрерывная функция $f(x) = |x|$ на том же отрезке не может быть приближена последовательностью $\{g_n(x)\}$, т.е. оказывается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-1 \leq x \leq 1} |x| - g_n(x) = \infty.$$

При этом высокая степень интерполирующего полинома зачастую может привести к накоплению ошибок округления. Поэтому на практике избегают пользоваться интерполяционными полиномами высокой степени, так как ошибка интерполяции растет пропорционально степени полинома.

Выходом из создавшегося положения отчасти стал переход на кусочно-полиномиальную интерполяцию с невысокой степенью полинома. В этом случае сегмент $[A, B]$ разбивают на подсегменты и на каждом из них приближают функцию $f(x)$ полиномами невысокой степени. Одним из таких эффективных способов приближения функций, получивший широкое распространение в вычислительной практике, явилось сплайн-интерполирование [12], опирающееся на использование простейших форм, в частности на полиномы третьей и пятой степени [13], наиболее удобные для прикладных задач. Естественно, что повышение точности аппроксимации сплайнами может идти как по пути увеличения степени полинома $g(x)$, так и выбора специального закона для ввода нерегулярной сетки аргументов. При этом необходимо учитывать, что если исходная функция имеет сингулярности, такие, как разрывы, то чем выше порядок сплайна, тем хуже будут интерполироваться данные в окрестности сингулярности.

Одним из путей улучшения может быть использование той или иной модификации сплайн-метода [12–15], тем более что различных вариантов к настоящему времени имеется предостаточно и разрабатываются всё новые. Так, например, появились различные базисные сплайны на основе балансных приближений Б. А. Попова [13], атомарных функций В. Л. Рвачёва [14], локальных сплайнов В. С. Рябенского [15], барицентрических интерполяционных [16] и многих других. Все они ориентируются на теоретическую сторону аппроксимации, а не на прикладную, т. е. учитывают особенности аппроксимируемой функции, оговаривая это каждый раз различными требованиями к ней. При этом идея аппроксимации уже сама по себе носит сугубо прикладной характер.

Различные модификации, направленные на улучшение методов, оказываются алгоритмически и программно более сложными, а значит, и более затратными. В то же время естественное стремление к совершенствованию методов приближения, повышению их потенциальных возможностей влечет за собой, как правило, еще и сужение класса приближаемых функций.

Целью работы является создание эффективных адаптивных методов кусочно-линейной аппроксимации функций для задач поиска длин кривых и вычисления интегралов в условиях ограниченной информации о характере самой функции и наличия ее производных.

1. Адаптация

Чаще всего информацию о приближаемой функции $f(x)$ получают, используя равноотстоящие узлы. Однако в разных частях сегмента $[A, B]$ характер поведения функции может сильно отличаться (см. рис. 1, 2). Поэтому разбиение должно соответствовать характеру изменения функции. Разумеется, даже оптимальное распределение узлов (4) будет наилучшим только для конкретного случая функции $f(x)$. При этом, как правило, необходимо решать систему нелинейных уравнений. Такой путь вряд ли оправдан в качестве стандартного.

Существует два подхода построения сеток: априорный и апостериорный. Исторически так сложилось, что почти все рассматриваемые задачи приближения и методы их решения опирались на первый подход, что неизбежно приводит к более узкой области их применения.

При втором подходе по относительно небольшому объему исходной и текущей информации шаг за шагом строится сетка с желаемыми свойствами, необходимыми для приближения широкого класса функций, в том числе и трудновычислимых. Это оказывается возможным благодаря включению в процесс аппроксимации адаптивного управления, осуществляющего контроль за точностью приближения [17–24]. Такой подход единообразен для разных аппроксимируемых функций и протекает в автоматическом режиме. В отличие от традиционных методов он позволяет успешно решать многие задачи весьма простыми средствами, способствующими повышению эффективности аппроксимации, не заботясь о предварительном выяснении характерных особенностей приближаемой функции.

Под адаптивным управлением U обычно понимают неоптимальное управление в системе с неполной априорной информацией, но компенсируемой накапливаемой информацией о процессе и используемой для улучшения качества функционирования системы [25].

Адаптивная схема решения задачи приближения может опираться на построение следующего узла x_{k+1} сетки (2) по предыдущему узлу x_k .

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \quad (5)$$

где h_k – шаг, который адаптивно изменяется

$$h_{k+1} = h_k U(Q_k). \quad (6)$$

Входящий в (6) апостериорный критерий ситуации Q_k , характеризующий в определенном смысле состояние процесса приближения, сложившегося на момент k , является в общем случае многомерным функционалом на множестве признаков $\{Q_k\}$ ситуации Q . В качестве признаков могут выступать разнообразные прямые или производные измеримые характеристики процесса (6), например быстродействие, вычислительные затраты, полученная локальная точность приближения или степень отклонения её от заданного значения и т. п. [17, 21–25].

При весьма общих условиях можно считать шаги процесса (5) положительными, что влечет за собой положительность функции $U(Q)$. Определим функцию $U(Q)$ на всей оси $-\infty < Q < \infty$. Из (6) следует, что увеличение (уменьшение) $U(Q)$ влечет за собой увеличение (уменьшение) шага. Специализируем функцию $U(Q)$, требуя выполнения обратной пропорциональности между значениями функции $U(Q)$ в точках, равноотстоящих от положения начальной ситуации. Это вызвано тем, что уменьшение или увеличение шага должно происходить в одинаковой мере при равных по абсолютной величине, но разных по знаку изменениях Q [20].

Указанными свойствами обладает единственная функция

$$U(Q) = \exp(\alpha(Q)),$$

где α – коэффициент адаптации, характеризующий интенсивность шагового процесса (6)

$$\alpha = \ln C, \quad C = U(1) > 0.$$

В результате закон адаптивного управления шагом (6) можно представить формулой

$$h_{k+1} = h_k \exp(\alpha Q_k). \quad (7)$$

Ситуацию Q_k удобно записать как уровень отклонения функции $g(x)$ от функции $f(x)$

$$Q_k = \max_{x_k < x < x_k} \|f(x) - g(x)\|. \quad (8)$$

Если же необходимо удерживать отклонение (8) в определённых рамках, то естественно ввести в (7) разность

$$\varepsilon - Q_k \quad (9)$$

и получить закон адаптивного управления шагом в виде

$$h_{k+1} = h_k \exp[\alpha(\varepsilon - Q_k)], \quad (10)$$

где ε – некоторая степень допустимого отклонения.

На основе адаптивного механизма (10) можно решать конкретные задачи с учетом свойственных им особенностей. Проиллюстрируем возможности такого подхода приближения функций на задачах вычисления длины дуг кривых и определённых интегралов.

2. Адаптивный подход в задаче определения длины кривой линии

Одной из важных числовых характеристик линии является её длина. Если отрезок линии – кривая, то ее длиной считают предел последовательно вписанных ломаных в линию, когда число звеньев неограниченно увеличивается, причем длина наибольшего из них стремится к нулю (см. рис. 2, а). Будем приближенно измерять длину кривой суммой длин вписанных в неё звеньев ломаной l_1, l_2, \dots, l_n

$$L = \sum_{k=1}^n l_k, \quad (11)$$

где длина каждого звена l_k в прямоугольных координатах записывается в виде

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}. \quad (12)$$

Согласно адаптивному закону (10), процесс приближения длины L кривой $y=f(x)$ на $[A, B]$ проводится пошагово (рис. 3) по формуле

$$h_{k+1} = h_k \exp[\alpha(\varepsilon - |y_k^* - g_k^*|)], \quad g_k^* = (y_k + y_{k+1})/2, \quad (13)$$

где y_k^* – приближенное значение функции $f(x)$ в срединной точке $x_k^* = (x_k + x_{k+1})/2$, наиболее вероятного максимального отклонения функции $g(x)$ от $f(x)$.

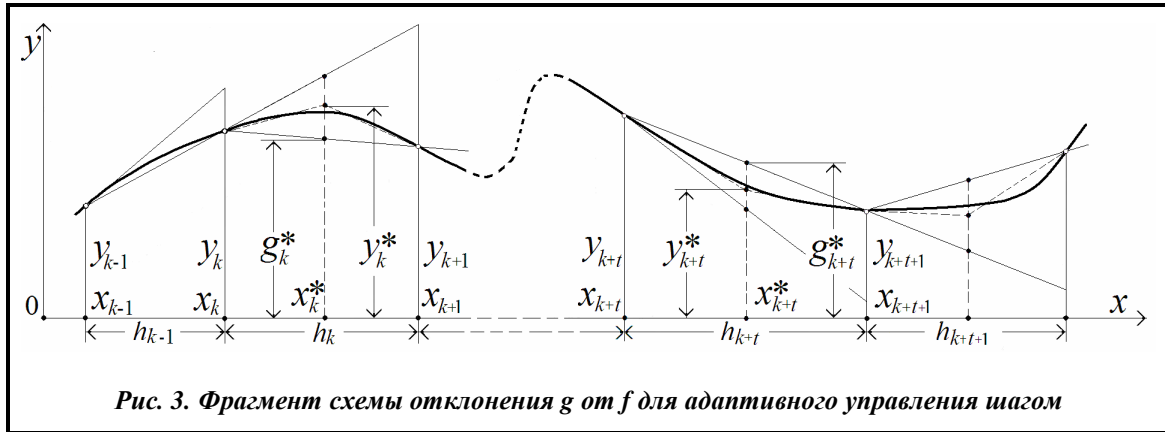


Рис. 3. Фрагмент схемы отклонения g от f для адаптивного управления шагом

Естественно, что в формуле (13) можно использовать не приближенное значение функции $f(x)$, а точное. Однако тогда потребуется вычисление дополнительного значения функции $f(x)$ в срединной точке, чего мы хотим избежать.

Из рис. 3 ясно, что истинная ордината функции $f(x)$, определенная в срединной точке x_k^* , приближенно может быть записана так:

$$y_k^* = 0.25[y_{k+1} + (3 + \mu_k)y_k - \mu_k y_{k+1}], \quad \mu_k = h_k / h_{k-1}. \quad (14)$$

В этом случае к текущей суммарной длине ломаной добавляется не одна (сплошная линия), а две (пунктир) длины хорды, которые лучше приближают отрезок кривой $y=f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ (рис. 3), т.е. вместо (12) применяется

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_k^*)^2 + (y_k - y_k^*)^2} + \sqrt{(x_{k+1} - x_k^*)^2 + (y_{k+1} - y_k^*)^2}$$

и далее направление вдоль хорды $y_k y_{k+1}$ заменяется на $y_k^* y_{k+1}$.

Иногда сложные кривые, особенно с самопересечениями (см. рис. 2, а), в том числе замкнутой формы (см. рис. 2, б), задаются формулами в параметрическом представлении. Когда кривая на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ задана в виде $x=x(t), y=y(t), t \in [t_k, t_{k+1}]$, то длина звена определяется выражением

$$l_k = \sqrt{[(x_k - x_{k+1})/(t_k - t_{k+1})]^2 + [(y_k - y_{k+1})/(t_k - t_{k+1})]^2}.$$

При изменении знака условия (9) происходит локальная корректировка процесса с минимумом затрат, в отличие от традиционного подхода, предполагающего удвоение числа узлов на всём сегменте $[A, B]$ для достижения необходимой точности. Если последний адаптивный шаг перекрывает границу B , то конечной ординатой принимается $f(B)$.

Величина α в формуле (13), кроме своего основного назначения, может ещё содержать инструмент, вводящий шаговый процесс в колебательный режим, который позволил бы лучше удерживать близость $\varepsilon \sim |y_k^* - g_k^*|$ при резком изменении функции $f(x)$ (вплоть до разрыва её первой производной). Это возможно сделать путём адаптации коэффициента α в виде

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} \exp[\alpha_0(\varepsilon - |y_k^* - g_k^*|)], \quad \alpha_0 > 0.$$

3. Адаптивный подход в задаче вычисления определённого интеграла

Когда неизвестно представление определённого интеграла, например, в виде бесконечного сходящегося ряда, и нельзя, взяв определённое число членов ряда, обеспечить заданную абсолютную

точность, то приходится напрямую использовать формулы Ньютона-Котеса или Гаусса [2]. Первые формулы более удобны и просты, но уступают по точности вторым при том же числе узлов сетки.

Совершенствование квадратурных формул с момента их появления и до наших дней не прекращается [18, 19]. Однако если на начальном этапе это относилось к выбору оптимальных узлов или коэффициентов квадратур, то в последнее время задача улучшения переводится в разряд приспособления параметров той или иной квадратуры к особенностям подынтегральной функции [2]. В ряде случаев второй этап, благодаря введению адаптивного управления, приводит к результатам, находящимся на уровне оптимальных квадратур Гаусса, а иногда и превосходящих их [21–25]. Сложности реализации, возникающие при решении таких задач, прежде всего, связаны с появлением трудновычислимых функций, привнесённых принятыми моделями.

Предлагается использовать апостериорный адаптивный подход к численному интегрированию, тем более что обнаруживается почти полное сходство его с получением длины кривой (11). Действительно, приближенное представление определённого интеграла (см. рис. 3), с учетом (13) и (14), можно выразить в виде суммы

$$S = 0.5 \sum_{k=0}^{n-1} h_k (y_k^* + g_k^*).$$

Все формулы типа (13), обеспечивающие адаптивный процесс, остаются в силе, полностью совпадает и корректировка сетки (14). Иными словами, алгоритм позволяет выдавать как L , так и S , а также набор аппроксимации $\{x_k^*, f_k^*\}$ на $[A, B]$.

Для гарантии численной устойчивости интегрирования при резком изменении функции $f(x)$ можно величину шага (13) ограничивать снизу и сверху.

4. Численный эксперимент

Оценка качества метода обычно проводится по различным критериям [1, 2], которые, кроме его конкретного назначения, могут учитывать и определённую степень универсальности в решении задач сравнительно широкой области.

При оценке эффективности метода используем широко распространённый подход, который учитывает два наиболее важных признака: достигнутую точность решения и количество вычислительных затрат N . Следуя работе [1], такой условный критерий (индекс эффективности) в нашей задаче приближения можно, например, взять в виде

$$E = \frac{\ln(|S^*| + h_0^2) - \ln(|S - S^*| + h_0^2)}{N}, \quad (15)$$

где мера близости $|S - S^*| \leq \varepsilon$ на $[A, B]$ (см. (13), (14) и рис. 2); S – приближенное решение, полученное конкретным методом, а S^* – точное решение.

В таблице представлены решения задач в основном с трудновычислимыми функциями, предложенными известными авторами [7, 22–24, 26], в которой сравниваются результаты тестирования методами трапеций (МТ) и адаптации (МА) с указанием значений критерия качества E (15) и количества N вычислений $f(x)$ для достижения точности ε . В данном случае в методе адаптации принято $\varepsilon=0,01$, $\alpha=10$, а общее начало $h_0=0,0625$. В таблице $\sigma(x)$ обозначает единичную функцию скачка О. Хевисайда.

Как видим, эффективность E метода адаптации оказывается выше равномерного метода трапеций при одних и тех же исходных условиях.

Результаты расчета тестовых примеров

Функция	[A, B]	Метод	S	N	E
$y = 13(x - x^2)e^{-3x/2}$ [22]	[0; 4]	МТ	-1.5529004234	65	0.081016
		МА	-1.5535812508	42	0.123441
$y = 1/(1 + (5x)^2)$ [7]	[-1; 4]	МТ	0.5788232767	81	0.061715
		МА	0.5782095842	45	0.107864
$y = (x^2)^{1/3} - x$	[-1; 2]	МТ	1.0022152690	49	0.102729
		МА	1.0066125146	31	0.167322
$y = [(x - 0.3)^2 + 0.1^2]^{-1} + [(x - 0.9)^2 + 0.2^2]^{-1} - 6$ [23]	[0; 1]	МТ	29.8469834899	35	0.216577
		МА	29.8685381846	30	0.255216
$y = f_1\sigma(2-x) + \sigma(x-2)[f_2\sigma(5-x) + f_3\sigma(x-5)]$ $f_1 = (x-1)^4 - 1 , f_2 = (x-3)^4 - 1 , f_3 = (x-5)^4 + 15 $	[-0.5; 6.5]	МТ	30.0541000366	113	0.064510
		МА	30.0356075719	130	0.065790
$y = \cos x / \ln x $	[1.05; 8.5]	МТ	4.0401378301	120	0.033874
		МА	3.9911147636	61	0.087370
$y = \sin x + \ln x $	[0.1; 6.6]	МТ	11.5708938063	105	0.072655
		МА	11.5710118748	61	0.124723
$y = e^{-x^2}$ (интеграл Доусона) [26]	[0; 6.5]	МТ	$1.762337 \cdot 10^{17}$	209	0.020629
		МА	$1.737279 \cdot 10^{17}$	193	0.035823
$y = \arcsin(\sin x) - x^{1/2}$	[0; 8]	МТ	-13.6297344023	129	0.059185
		МА	-13.6328221601	50	0.162118
$y = x + 1 + (x - 1)\sigma(x - 1)(\sigma(3 - x) + 1)$ [24]	[0; 5]	МТ	7.4375000000	81	0.058363
		МА	7.5461485167	45	0.111335

Заключение

Приведен простой механизм адаптивного управления шаговым процессом кусочно-линейной аппроксимации широкого класса непрерывных функций с конечным числом разрывов первого и второго рода на сегменте [A, B]. Данный метод иллюстрирует достаточно высокую эффективность, используя экспоненциальный закон адаптации, быстро реагирующий на уровень отклонения погрешности от допустимого значения и позволяющий получать более общие результаты, справедливые для широкого класса функций.

Рассмотренные случаи, посвященные, в основном, вычислению определенных интегралов трудно-вычислимых функций, показали достаточно высокую эффективность подхода, благодаря использованию адаптивного контроля за ходом вычислений. Для работы метода заведомо не требуются знания тех или иных аналитических свойств функции $f(x)$, например существования производных, наличия характерных точек и т. п., исключается отдельный предварительный и всесторонний анализ рассматриваемой функции. Исходные данные минимальны: подынтегральная функция $f(x)$, определенная на произвольно большой конечной области [A, B], необходимая допустимая точность ϵ отклонения от $f(x)$ и начальный шаг.

Предлагаемый самонастраивающийся метод гарантированно обеспечивает необходимую точность в автоматическом режиме. Нет необходимости в выборе подходящей квадратуры, заранее заданного специального распределения узлов и соответствующих весовых констант, а следовательно, пересчета в случае неудачного их назначения. Метод конструктивно прост, вполне конкурентоспособен среди подобных, основанных на кусочно-линейной аппроксимации разнообразных функций. Результат реализуется за один проход без каких-либо предварительных преобразований и решений систем уравнений, использования таблиц квадратурных коэффициентов и узлов. Схема не требует хранения в памяти информации о функции $f(x)$ сразу на всей области [A, B]. Привлекается лишь малый объем оперативной памяти и производятся только прямые вычисления. В ситуациях с максимально априорной неопределенностью сохраняется работоспособность и численная устойчивость метода.

Достоверность полученных результатов подтверждается решением известных тестовых примеров и сопоставлением их с результатами решений другими методами.

Предлагаемый метод открывает путь к созданию эффективных средств приближения функций и связанных с ними численным интегрированием, дифференцированием, решением как конечных, так и интегральных и дифференциальных уравнений, суммированием рядов и т.п.

Литература

1. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 219 с.
2. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. М.: Гостехиздат, 1954. 98 с.
3. Weiershtrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*. 1885. P. 633–639.
4. Mhaskar H. N., Pai D. V. Fundamentals of approximation theory. New Delhi: Narosa Publishing House, 2000. 548 p.
5. Trefethen L. N. Approximation theory and approximation practice. Oxford: Oxford University, 2013. 304 p.
6. Richardson L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1911. Ser. A. Vol. 210. P. 307–357.
7. Runge C. Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten en ordinaten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 1901. Vol. 46. S. 224–243.
8. Чебышев П. Л. О функциях, мало уклоняющихся от нуля при некоторых величинах переменных. Собр.соч. 1881. Т. 3. С. 108–127.
9. Faber G. Über die interpolatorische darstellung stetiger funktionen. *Deutsche Mathematiker-Vereinigung Jahresbeucht*. 1914. Vol. 23. S. 192–210.
10. Marcinkiewicz J. Sur interpolation d'operations. *Comptes rendus de l'Académie des Sci*. 1939. Vol. 208. P. 1272–1273.
11. Бернштейн С. Н. О многочленах ортогональных в конечном интервале. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1937. 130 с.
12. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The theory of splines and their applications. New York and London: Academic Press, 1967. 284 p.
13. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций сплайнами. Киев: Наук. думка, 1984. 600 с.
14. Рвачёв В. Л., Рвачев В. А. Атомарные функции в математической физике. *Математизация знаний и науч.-техн. прогресс*. Киев: Наук. думка, 1975. С. 188–199.
15. Рябенский В. С. Локальные формулы гладкого восполнения и гладкой интерполяции по их значениям в узлах неравномерной прямоугольной сетки. М.: Ин-т проблем математики АН СССР, 1974. 42 с. (Препринт. АН СССР. Ин-т проблем математики; 21).
16. Bos L., De Marchi S., Hormann K., Klein G. On the Lebesgue constant of barycentric rational interpolation at equidistant nodes. *Numerische Mathematik*. 2012. Vol. 121. Iss. 3. P. 461–471.
17. Bellman R. E. Adaptive Control Processes. A Guided Tour. Princeton Legacy Librar. 2016. 276 p.
18. Бахвалов Н. С. Об алгоритмах выбора шага интегрирования. *Вычисл. методы и программирование*. 1966. Вып. 5. С. 3–8.
19. Пукк Р. А. Алгоритм интегрирования, учитывающий степень гладкости функций. *Изв. АН ЭССР. Физика. Математика*. 1970. Т. 19. № 3. С. 368–370.
20. Шелудько Г. А. Адаптивное интегрирование. АН Украины. Ин-т проблем машиностроения. Харьков. 1973. 12 с. Деп. ВИНТИ 26.07.73. № 7753.
21. Шелудько Г. А., Угримов С. В. Адаптивные решения некоторых задач вычислительной математики. Харьков: Ин-т проблем машиностроения АН Украины, 1997. 37 с.
22. Gander W., Gautschi W. Adaptive Quadrature – Revisited. *BIT Numerical Math*. 2000. Vol. 40. Iss. 1. P. 84–101.
23. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. Computer Methods for Mathematical Computations. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1977. 259 p.
24. Mathews J., Fink K. Numerical Methods Using Matlab. 4nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2004. 696 p.
25. Шелудько Г. А., Угримов С. В. Адаптивная гибридизация. Х.: Міськдрук, 2011. 308 с.
26. Гаучи У. Интеграл вероятностей и интегралы Френеля. Справ. по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

Поступила в редакцию 16.03.2018