

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У СКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО КРУТІННЯ

О. В. Демидов

alexandr.v.demidov@gmail.com

В. Г. Попов, д-р фіз.-мат. наук

dr.vg.popov@gmail.com

Національний університет
«Одеська морська академія»,
65029, Україна, м. Одеса,
вул. Дідріхсона, 8

У статті розв'язана вісесиметрична динамічна задача з визначення напруженого стану в околі кругової тріщини в скінченному циліндрі. Нижня основа циліндра жорстко закріплена, а верхня навантажена тангенціальними напруженнями, які залежать від часу. На відміну від традиційних аналітичних методів, що ґрунтуються на використанні інтегрального перетворення Лапласа, запропонований метод полягає в різницевій апроксимації тільки похідної за часом. Для цього використовуються спеціальним чином підібрані нерівновіддалені вузли та спеціальне подання розв'язку в цих вузлах. Такий підхід дозволяє звести вихідну задачу до послідовності крайових задач для однорідного рівняння Гельмгольца. Кожна така задача розв'язується шляхом застосування скінченних інтегральних перетворень Фур'є і Ганкеля з подальшим їх оберненням. В результаті було отримано інтегральне подання для кутового переміщення через невідомий стрибок цього переміщення в площині тріщини. Відносно похідної цього стрибка з граничної умови на тріщині отримано інтегральне рівняння, яке в результаті застосування інтегрального оператора Вебера-Соніна і ряду перетворень зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно невідомої функції, пов'язаної зі стрибком. Наближене розв'язання цього рівняння здійснено методом колокації, причому інтеграл наближали квадратними формулами Гаусса-Лежандра. Знайдений числовий розв'язок дав можливість отримати наближену формулу для розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН). Користуючись цією формулою, провели дослідження впливу характеру навантаження і геометричних параметрів циліндра на почасову залежність цього коефіцієнта. Аналіз результатів показав, що у всіх розглянутих видах навантаження максимум значень КІН спостерігається під час перехідного процесу. Під час прикладення раптового постійного навантаження цей максимум у 2–2,5 рази перевищує статичне значення. У разі раптового гармонічного навантаження максимум КІН теж значно перевищує значення, яких він набуває за ustalених коливань, за відсутності резонансу. Збільшення висоти циліндра і зменшення площі тріщини призводять до збільшення тривалості перехідного процесу і зменшення величини максимуму КІН. Той самий ефект спостерігається, коли площа тріщини наближається до нерухомого кінця циліндра.

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), вісесиметрична динамічна задача, скінченні різниці за часом, скінченний циліндр, кругова тріщина, крутний момент.

Вступ

Велика кількість елементів машин і конструкцій мають циліндричну форму. Наявність в них дефектів, наприклад тріщин, суттєво знижує їхні експлуатаційні характеристики і може призвести до руйнування, особливо в умовах динамічного навантаження. Тому дослідження розподілу напружень в циліндричних тілах з тріщинами за динамічного навантаження є важливою задачею.

Аналіз сучасної наукової літератури показує, що напружений стан скінченних і нескінченних циліндричних тіл з тріщинами під час статичного навантаження вивчений достатньо повно. Приклади розв'язання подібних задач наведені в роботах [1–6]. Під час розв'язання динамічних задач, в основному, розглядалися необмежені тіла з тріщинами, частіше за все круговими. Детальний аналіз результатів поданий у роботах [7, 8]. Щодо гармонічних коливань, то є ряд робіт, наприклад [9, 10], де кругові тріщини розглянуті у плитах та нескінченних циліндрах, а також [11, 12] у яких розглянуті кругова і кільцева тріщини у скінченному циліндрі.

Пропонується також для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень у циліндричних тілах із зовнішніми кільцевими тріщинами використовувати змішані числово-експериментальні методи [13, 14]. Але цим методам, як і всім експериментальним, властиві недоліки, пов'язані з тим, що необхідно проводити експерименти для кожного конкретного зразка. Це ускладнює дослідження впливу геометричних розмірів циліндра на значення КІН.

© О. В. Демидов, В. Г. Попов, 2018

Складність теоретичних досліджень динамічних задач обумовлена необхідністю використання інтегрального перетворення Лапласа за часом з подальшим числовим оберненням. Проте ця задача не тільки математично складна але й некоректна. Останнім часом з'явилися роботи, у яких застосовано модифікований метод скінченних різниць за часом. За допомогою цього методу у даній роботі розв'язано задачу про визначення КІН в околі плоскої кругової тріщини у скінченному циліндрі за умови дії крутного навантаження. Дотепер така задача розглядалась лише у стаціонарній постановці [15], для гармонічного моменту [11] або для випадку циліндра з накладкою [16].

Постановка задачі

Розглядається скінченний пружний циліндр з ізотропного матеріалу висотою a і радіусом r_0 (рис. 1). З циліндром пов'язана циліндрична система координат, центр якої співпадає з центром нижньої основи, а вісь Oz з віссю циліндра. Нижня основа вважається нерухомою, а до верхньої основи у початковий момент часу $t=0$ прикладене дотичне навантаження $G \cdot \bar{p}(r, t)$. На висоті $z=c$, $0 < c < a$, паралельно торцям циліндра, міститься кругова тріщина радіуса $b < r_0$, центр якої знаходиться на осі. Бічна поверхня циліндра і поверхня тріщини вважаються вільними від напружень. За цих умов циліндр перебуває у стані вісесиметричної деформації крутіння й відмінним від 0 буде тільки кутове переміщення $\bar{w}(r, z, t)$.

Далі, для формулювання початково-крайової задачі, доцільно буде перейти до безрозмірних величин за формулами

$$\begin{aligned} \bar{w}(r_0\eta, a\zeta, r_0\tau/c_2) &= r_0 \cdot w(\eta, \zeta, \tau), \quad \gamma = a/r_0, \quad l = c/a, \quad \beta = b/r_0, \\ r = r_0\eta, \quad z = a\zeta, \quad 0 \leq \eta, \zeta \leq 1, \quad t = r_0\tau/c_2, \quad \tau \in (0, +\infty), \quad c_2^2 = G \cdot \rho^{-1}, \end{aligned}$$

де ρ , G – густина та модуль зсуву матеріалу циліндра.

Тоді безрозмірне переміщення буде задовольняти рівняння

$$D_{\eta\zeta} w = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad D_{\eta\zeta} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \tag{1}$$

Рівняння (1) розглядається з нульовими початковими умовами.

Сформулюємо граничні умови у відносних безрозмірних величинах.

На торцях циліндра вони мають вигляд

$$w|_{\zeta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = \gamma p(\eta, \tau), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{2}$$

де $p(\eta, \tau) = \bar{p}(r/r_0, c_2 t/r_0)$.

На бічній поверхні циліндра повинна виконуватись рівність

$$\tau_{\phi r}(1, \zeta, \tau) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \in [0, +\infty). \tag{3}$$

Для умов на тріщині маємо

$$\tau_{\phi z}(\eta, l, \tau) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \quad \tau \in [0, +\infty), \quad \chi(\eta, \tau) = \tilde{\chi}(r/r_0, c_2 \tau/r_0), \tag{4}$$

де $\chi(\eta, \tau) \equiv 0$, $\eta \geq \beta$, а $\tilde{\chi}(r, t)$ – невідомий стрибок переміщень у площині тріщини.

Для розв'язання сформульованої початково-граничної задачі (1)–(4) застосуємо метод, що ґрунтується на різницевій апроксимації похідних за часом, детально викладений у [17]. З цієї метою утворюємо часову сітку

$$\tau_k = \sum_{v=1}^k h_v, \quad h_v = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad (\tau_0 = 0), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad h_i \neq h_j.$$

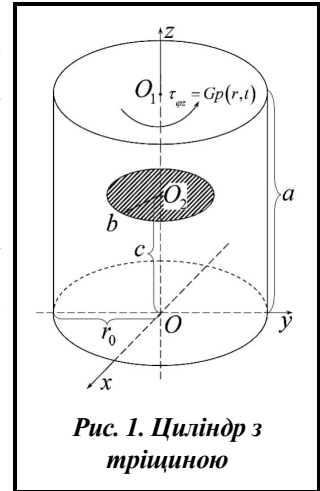


Рис. 1. Циліндр з тріщиною

Введемо позначення $w(\eta, \zeta, \tau_k) = w_k(\eta, \zeta)$ і скористаємось лівими різницевиими похідними за часом. Тоді з початкових умов знаходимо $w_0(\eta, \zeta) = 0$, а з рівняння (1) такі диференціальні рівняння:

$$D_{\eta\zeta} w_1 - \frac{w_1}{h_1^2} = 0, \quad D_{\eta\zeta} w_k - \frac{w_k}{h_k^2} = \frac{w_{k-2}}{h_k h_{k-1}} - \frac{w_{k-1}}{h_k} \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k-1}} \right), \quad k = 2, 3, \dots \quad (5)$$

Аналітичне розв'язання рівнянь (5) значно ускладнює те, що у правій частині знаходяться значення переміщень у двох попередніх моментах часу. Щоб уникнути цих труднощів, згідно з [17], запишемо кутове переміщення і напруження у вигляді лінійної комбінації нових функцій

$$w_k = \sum_{v=1}^k C_{kv} U_v, \quad \tau_{\phi rk} = \sum_{v=1}^k C_{kv} \tau_{\phi rv}, \quad \tau_{\phi zk} = \sum_{v=1}^k C_{kv} \tau_{\phi zv}, \quad p_k = \sum_{v=1}^k C_{kv} P_v, \quad (6)$$

де U_v – нова невідома функція.

У роботі [17] показано, якщо обрати коефіцієнти у формулах (6) згідно з формулами

$$C_{kk} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C_{k, k-1} = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1} - h_k}, \quad k = 2, 3, \dots, \\ C_{k, v} = \frac{h_v^2}{h_k^2 - h_v^2} \cdot \left(\frac{h_k}{h_{k-1}} C_{k-2, v} - \left(1 + \frac{h_k}{h_{k-1}} \right) C_{k-1, v} \right), \quad k = 3, 4, \dots; \quad v = 1, 2, \dots, k-2,$$

то функції U_v задовольняють однорідні рівняння Гельмгольца

$$D_{\eta\zeta} U_v - \kappa_v^2 U_v = 0, \quad v = 1, 2, 3, \dots, \quad \kappa_v = h_v^{-1} \quad (7)$$

Граничні умови на поверхнях циліндра відносно цих функцій запишуться так:

$$U_v|_{\zeta=0} = 0, \quad \frac{\partial U_v}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \gamma P_v, \quad \tau_{\phi rv} \Big|_{\eta=1} = 0. \quad (8)$$

Умови на тріщині набудуть вигляду

$$\tau_{\phi zv} \Big|_{\zeta=l} = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \quad \langle U_v \rangle \Big|_{\zeta=l} = \chi_v(\eta), \quad \chi_v(\eta) \equiv 0, \quad \eta \geq \beta, \quad \chi_k = \sum_{v=1}^k C_{kv} \chi_v. \quad (9)$$

Зведення задачі до інтегрального рівняння і його розв'язання

Розв'язок отриманої граничної задачі (7), (8), (9) позначимо у вигляді суми

$$U_v(\eta, \zeta) = U_v^0(\eta, \zeta) + U_v^1(\eta, \zeta).$$

Перший доданок є розв'язком задачі за відсутності тріщини та задовольняє умови на торцях і бічній поверхні та подається формулою

$$U_v^0(\eta, \zeta) = \int_0^{\infty} \frac{\gamma \operatorname{sh}(\alpha_v \zeta)}{\alpha_v \operatorname{ch}(\alpha_v)} \overline{P}_v(\lambda) \lambda J_1(\eta \lambda) dt,$$

де $\alpha_v^2 = \gamma^2(t^2 + \kappa_v^2)$, $\overline{P}_v(\lambda) = \int_0^{\infty} \eta P_v(\eta) J_1(\eta \lambda) d\eta$.

Другий доданок є розв'язком рівняння (7) і задовольняє нульові умови на торцях і бічній поверхні циліндра

$$U_v^1 \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \frac{\partial U_v^1}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad \tau_{\phi rv}^1 \Big|_{\eta=1} = 0,$$

а на поверхні тріщини є розривним зі стрибком (9) і задовольняє умови

$$\tau_{\phi zv}^1(\eta, l) = -\tau_{\phi zv}^0(\eta, l), \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \quad \langle U_v^1 \rangle \Big|_{\zeta=l} = \chi_v(\eta), \quad \chi_v(\eta) \equiv 0, \quad \eta \geq \beta. \quad (10)$$

Розв'язок цієї крайової задачі побудовано методом інтегральних перетворень, аналогічно роботам [11, 16], і він має вигляд

$$U_v^1(\eta, \zeta) = \int_0^1 \xi \chi_v(\xi) [S(\xi, \eta, \zeta) + D(\xi, \eta, \zeta)] d\xi,$$

де

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda J_1(\eta \lambda) J_1(\xi \lambda) [F(\lambda, \zeta - l) + F(\lambda, \zeta + l)] d\lambda,$$

$$D(\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{\gamma^2} \cos \lambda_j l \cdot \sin \lambda_j \zeta \cdot \frac{K_2(q_{jv})}{I_2(q_{jv})} I_1(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta),$$

$$F(\lambda, \zeta \pm l) = \operatorname{sgn}(\zeta \pm l) \frac{\operatorname{sh}(\alpha_v(1 - |\zeta \pm l|))}{\operatorname{sh} \alpha_v},$$

$$\alpha_v = \gamma \sqrt{\lambda^2 + \kappa_v^2}, \quad q_{jv} = \frac{\lambda_j^2}{\gamma^2} + \kappa_v^2, \quad \lambda_j = \frac{\pi}{2} (2j - 1).$$

Цей розв'язок містить невідому функцію $\chi_v(\xi)$. Якщо скористатись умовою на тріщині (10), то отримаємо рівняння відносно функції $\chi_v(\xi)$, яке після інтегрування частинами, набуде такого вигляду:

$$\int_0^\beta \xi \psi_v(\xi) [F_1(\xi, \eta) + D_1(\xi, \eta)] d\xi = \int_0^\infty \frac{\gamma \operatorname{ch}(\alpha_v l)}{\operatorname{ch}(\alpha_v)} \overline{P}_v(\lambda) \lambda J_1(\eta \lambda) d\lambda, \quad 0 \leq \eta \leq \beta, \quad (11)$$

де

$$\psi_v(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \chi_v(\xi)),$$

$$D_1(\xi, \eta) = 2 \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j^2}{\gamma^2} \cos^2 \lambda_j l \cdot \frac{K_2(q_{jv})}{q_{jv} I_2(q_{jv})} I_0(q_{jv} \xi) I_1(q_{jv} \eta),$$

$$F_1(\xi, \eta) = - \int_0^\infty \frac{\alpha_v}{\operatorname{sh} \alpha_v} \operatorname{ch}(\alpha_v(1-l)) \cdot \operatorname{ch}(\alpha_v l) \cdot J_1(\eta \lambda) J_0(\xi \lambda) d\lambda.$$

Для розв'язання рівняння (11) зводимо його до рівняння Фредгольма II роду за відомою методикою [11, 16]. Для цього вводимо нову невідому функцію $\phi_v(\tau)$

$$\psi_v(\xi) = - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \int_\xi^\beta \frac{\tau \cdot \phi_v(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} d\tau$$

і застосовуємо до обох частин рівняння (11) оператор

$$D_2[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(\eta) d\eta.$$

Внаслідок цих перетворень, введення позначень

$$\sigma_{jv} = \sqrt{(2j-1)^2 + \left(\frac{2\gamma\kappa_v}{\pi}\right)^2}, \quad \theta_{jv} = \frac{\pi\sigma_{jv}}{4\gamma}, \quad \lambda = u\kappa_v, \quad p = \sqrt{u^2 + 1},$$

$$\tau = \beta y, \quad \phi_v(\tau) = \beta g_v(y), \quad x = \beta s,$$

і парного продовження функції $g_v(y)$ на проміжок $[-1; 1]$, рівняння (11) зведено до інтегрального рівняння Фредгольма II роду

$$g_v(s) - \frac{2\beta}{\pi\gamma} \int_{-1}^1 g_v(y) [B(y,s) + Q(y) - Q(y-s)] dy - g_v(0) = Z_v(s), \quad (12)$$

де

$$Z_v(s) = -4\kappa_v\beta \int_0^1 \eta P_v(\eta) \int_0^\infty \frac{\text{ch}(\gamma\kappa_v p l)}{\text{ch}(\gamma\kappa_v p)} J_1(\eta\kappa_v u) \sin^2\left(\frac{\kappa_v u \beta s}{2}\right) du d\eta,$$

а $B(y,s)$ і $Q(y)$ подаються рівномірно збіжними рядами і невласними інтегралами.

Наближений розв'язок рівняння (12), як і в [11, 16], будемо шукати у вигляді інтерполяційного полінома. Для отримання розв'язку рівняння (12) інтеграли у ньому наближаємо за квадратурною формулою Гаусса-Лежандра [18] і отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомої функції у вузлах інтерполяції

$$g_{vj} - \frac{2\beta}{\pi\gamma} \sum_{m=1}^n g_{vm} A_m [B(y_m, y_j) + Q(y_m) - Q(y_m - y_j)] - \sum_{m=1}^n b_m^0 g_{vm} = Z(y_j), \quad (13)$$

де

$$B(y_m, y_j) = G(y_m, y_j) + R(y_m, y_j),$$

$$A_m = \frac{2}{(1 - y_m^2) [P_n'(y_m)]^2}, \quad b_m^0 = -\frac{P_n(0)}{y_m P_n'(y_m)}.$$

Після розв'язання системи невідома функція апроксимується інтерполяційним поліномом

$$g_v(y) \approx g_v^n(y) = \sum_{m=1}^n g_{vm} \frac{P_n(y)}{(y - y_m) P_n'(y_m)}, \quad g_{vm} = g_v(y_m), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n,$$

де $P_n(y)$ – поліном Лежандра n -го степеня, а y_m – корені цього полінома.

Отриманий розв'язок дозволяє визначити напружений стан у будь-якій точці циліндра.

Для критеріїв руйнування важливу роль відіграє коефіцієнт інтенсивності напружень, який визначається так:

$$\tilde{K}(t_k) = \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{r-b} \cdot \tilde{\tau}_{\phi_z}^1(r, c, t_k).$$

Безрозмірне значення КІН після розв'язання системи (18) отримуємо за формулою

$$K(t_k) = \frac{\tilde{K}(t_k)}{G\sqrt{b}}, \quad K(\tau_k) = \sum_{v=1}^k C_{kv} K_v, \quad K_v = -\frac{1}{\sqrt{2\beta\pi\gamma}} g_v^n(1). \quad (14)$$

Результати числових досліджень

За допомогою формул (14) проведено числове дослідження залежності КІН від безрозмірного часу $\tau = c_2 t / r_0$ для різних випадків навантаження. Вузли часової сітки були згущені біля точки $\tau = 0$.

Функцію, що визначає навантаження торця циліндра в умові (2), подавали у вигляді добутку

$$p(\eta, \tau) = \eta \cdot f(\tau).$$

Після дискретизації за формулами (6) отримали

$$P_v = \eta \cdot f_v,$$

де f_v знаходиться з рекурентного співвідношення $f(\tau_k) = \sum_{v=1}^k C_{kv} f_v$.

Результати розрахунків наведені на рис. 2 у вигляді графіків часових залежностей відносних КІН. Під час цих розрахунків вважали, що відносна висота циліндра $\gamma = a/r_0 = 2$, відносний радіус тріщини $\beta = b/r_0 = 0,5$ і тріщина розташована у серединній площині циліндра $l = c/r_0 = 0,5$. Графіки на рис. 2 побудовані для випадку дії раптово прикладеного крутного навантаження $f(\tau) = H(\tau)$ (крива 1), випадку задання крутного навантаження раптово прикладеним імпульсом одиничної довжини $f(\tau) = H(\tau) - H(\tau - 1)$ (крива 2), а також для випадку дії раптово прикладеного гармонічного крутного навантаження $f(\tau) = H(\tau) \cdot \cos(3\tau)$.

З огляду графіків на рис. 2 можна бачити, що в усіх розглянутих видах навантаження під час перехідного процесу спостерігається максимум значень КІН. Під час прикладення раптового постійного навантаження цей максимум у 2–2,5 рази перевищує статичне значення КІН. У разі раптового гармонічного навантаження максимальне значення КІН теж значно перевищує значення, яких він набуває за усталених коливань, за відсутності резонансу. Отже, найбільш ймовірно, що руйнування циліндра відбудеться під час перехідного періоду.

Також проведено числове дослідження впливу геометричних характеристик циліндра на почасову залежність КІН. Розрахунки здійснювались для випадку раптово прикладеного крутного навантаження (рис. 3–5).

Криві з номерами 1–3 побудовані за значень відносної висоти циліндра $\gamma = a/r_0 = 1; 2; 4$. Як видно з рис. 3, збільшення відносної довжини циліндра призводить до зменшення значення КІН і зменшення часу перехідного процесу.

На рис. 4 різним значенням відносної висоти розташування тріщини $l = c/r_0 = 0,25; 0,5; 0,75$ відповідають криві з номерами 1–3. Аналіз цього рисунка показує, що під час наближення тріщини до навантаженого торця циліндра спостерігається збільшення значень КІН.

На рис. 5 значенням відносного радіуса тріщини $\beta = b/r_0 = 0,25; 0,5; 0,75$ відповідають криві з номерами 1–3. Ці криві демонструють той факт, що у разі збільшення відносного радіуса тріщини відбувається збільшення значень КІН.

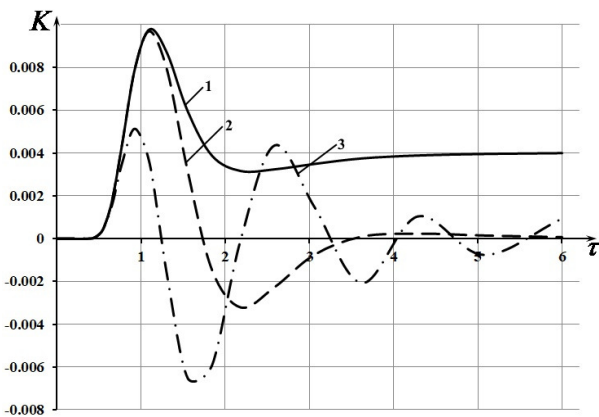


Рис. 2. Часова залежність відносних КІН за різних видів навантаження

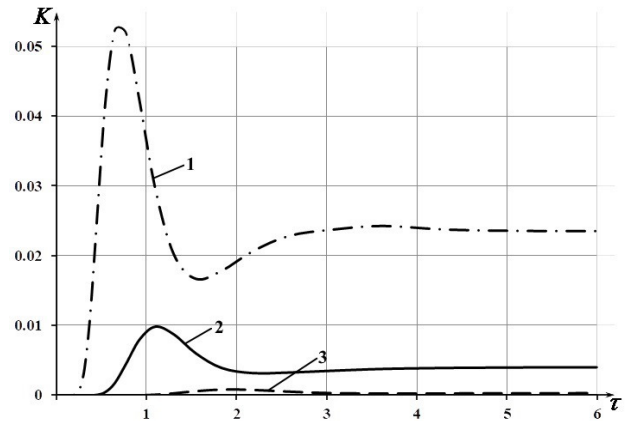


Рис. 3. Вплив висоти циліндра на значення КІН

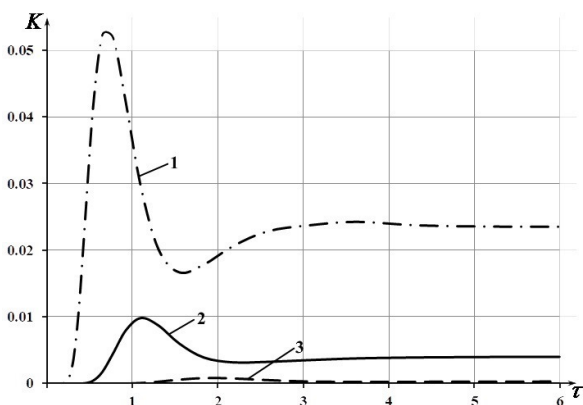


Рис. 4. Вплив висоти розташування тріщини на значення КІН

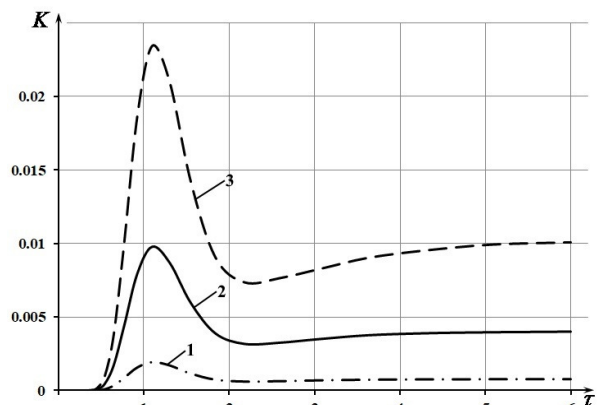


Рис. 5. Вплив відносного радіуса тріщини на значення КІН

Висновки

У статті запропонована методика розв'язання задачі з визначення напружено-деформованого стану пружного скінченного циліндричного тіла з внутрішньою круговою тріщиною, яке знаходиться під дією крутного навантаження. Ця методика базується на різнищевій апроксимації похідної за часом і використанні часової сітки зі спеціально підібраними вузлами. Числові результати демонструють ефективність такого підходу під час дослідження саме перехідних процесів, які відбуваються одразу після прикладення навантаження. Зауважимо, що наявність декількох тріщин не є принциповим для застосування запропонованого методу, але, безумовно, розв'язання такої задачі є технічно більш складним, оскільки доведеться розв'язувати вже систему інтегральних рівнянь. Вигляд граничних умов на поверхнях циліндра не обмежує можливості методу, оскільки цими умовами визначається тільки тип інтегральних перетворень, які застосовуються.

Слід також зазначити, що в рамках зазначеної постановки задачі тріщину не можна необмежено наближати до торців циліндра, оскільки у разі наближення до них збіжність інтегралів і рядів, які визначають розв'язок і ядра інтегральних рівнянь, значно погіршується, а під час виходу на самі торці інтеграли взагалі стають сингулярними. Отже, для цих граничних випадків потрібно розв'язувати окремі задачі.

Також виникають певні проблеми у застосуванні цієї методики за великих значень часу, що пов'язано із накопиченням покрокової похибки.

У всіх випадках знайдено значення безрозмірного хвильового числа, за якого значення КІН для тріщини досягають максимуму. У разі зростання кута β між включенням і тріщиною значення КІН для включення, до певних значень частоти коливань, зменшуються. Для випадку, коли дефекти лежать на одній прямій, значення КІН для включення найменші. Видно, що за невеликих частот ($\kappa_0 \leq 2$), зі збільшенням кута β , зростають і значення КІН для тріщини, а найбільші значення спостерігаються, коли кут прямує до 180° . В цілому, внаслідок складності хвильового поля, створеного відбиттям хвиль від дефектів, залежність КІН від частоти має істотні максимуми, на величину і положення яких впливає конфігурація дефекту.

Література

1. Akiyama T., Hara T., Shibuya T. Torsion of an infinite cylinder with multiple parallel circular cracks. *Theor. Appl. Mech.* 2001. Vol. 50. P. 137–143.
2. Lee Doo-Sung. Penny-shaped crack in a long circular cylinder subjected to a uniform shearing stress. *Eur. J. Mech. A.Solids.* 2001. Vol. 20. № 2. P. 227–239.
3. Huang G.-Y., Wang Y.-S., Yu S.-W. Stress concentration at a penny-shaped crack in a nonhomogeneous medium under torsion. *Acta Mech.* 2005. Vol. 180. № 1. P. 107–115.
4. Jia Z. H., Shippy D. J., Rizzo F. J. Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1989. Vol. 28. № 10. P. 2257–2273.
5. Kaman M. O., Gecit M. R. Cracked semi-infinite cylinder and finite cylinder problems. *Int. J. Eng. Sci.* 2006. Vol. 44. № 20. P. 1534–1555.
6. Qizhi W. A note on the crack-plane stress field method for analysing SIFs and its application to a concentric penny-shaped crack in a circular cylinder opened up by constant pressure. *Int. J. Fract. Kluwer Academic Publishers.* 1995. Vol. 66 № 4. P. 73–76.
7. Martin P. A., Wickham G. R. Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results. *Proc. R. Soc. London A Math. Phys. Eng. Sci. The Royal Society.* 1983. Vol. 390. № 1798. P. 91–129.
8. Гузь А., Зозуля В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. Киев: Наук. думка, 1993. 236 с.
9. Singh B. M., Haddow J. B., Vrbik J., Moodie T. B. Dynamic stress intensity factors for penny-shaped crack in twisted plate. *J. Appl. Mech.* 1980. Vol. 47. № 4. P. 963–965.
10. Srivastava K. N., Palaiya R. M., Gupta O. P. Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack in an infinitely long cylinder. *J. Elast. Kluwer Academic Publishers.* 1982. Vol. 12. № 1. P. 143–152.
11. Popov V. H. Torsional oscillations of a finite elastic cylinder containing an outer circular crack. *Mater. Sci.* 2012. Vol. 47. № 6. P. 746–756.
12. Попов В. Г. Крутильні коливання скінченного пружного циліндра зі зовнішньою кільцевою тріщиною. *Фізико-хім. механіка матеріалів.* 2011. № 6. С. 30–38.
13. Ivanytskyi, Ya. L., Boiko V. M., Khodan' I. V., Shtayura S. T. Stressed state of a cylinder with external circular crack under dynamic torsion. *Mater. Sci. Springer US.* 2007. Vol. 43. № 2. P. 203–214.

14. Andreikiv O. E., Boiko V. M., Kovchuk S. E., Khodan' I. V. Dynamic tension of a cylindrical specimen with circumferential crack. *Mater. Sci.* 2000. Vol. 36. № 3. P. 382–391.
15. Попов П. В. Задача про кручення скінченного циліндра з кільцевою тріщиною. *Машинознавство*. 2005. № 9. С. 15–18.
16. Демидов О. В., Попов В. Г. Нестационарный закрут скінченного циліндру[а] з круговою тріщиною. *Вісн. Запорізь. нац. ун-ту. Фізико-мат. науки*. 2017. № 1. С. 131–142.
17. Savruk M. P. New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics. *Mater. Sci. Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers*. 2003. Vol. 39. № 4. P. 465–471.
18. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

Надійшла до редакції 11.09.2018