

УДК 519.6

АДАПТИВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНАЛЬНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ФОРМ ИЗДЕЛИЙ

С. В. Чопоров,
канд. техн. наук
s.choporoff@znu.edu.ua

Запорожский
национальный
университет,
69600, Украина, г. Запорожье,
ул. Жуковского, 66

В проектировании часто применяется численный анализ моделей изделий машиностроения, основанных на уравнениях в частных производных. Одним из наиболее используемых численных методов является метод конечных элементов, в котором непрерывная модель изделия заменяется дискретной моделью. В результате первым этапом моделирования становится построение дискретной модели формы изделия как конечного объединения простых фигур. При этом распределение элементов в дискретной модели формы изделия оказывает существенное влияние на точность численного анализа. Одним из наиболее универсальных подходов к компьютерному моделированию форм изделий является функциональное представление. Данный подход основан на использовании неявных функций для определения множества точек, которое соответствует форме объекта. При этом неявные функции для сложных объектов могут быть построены конструктивно, используя комбинации более простых функций. Для этого могут быть применены предложенные в теории R-функций действительные функции, соответствующие логическим операциям. Хотя функциональное представление позволяет проверить принадлежность точки множеству, но для него необходима разработка методов построения дискретных моделей. В данной работе предложен метод для построения адаптивных дискретных моделей форм объектов, представленных функционально. В этом методе используется оценка точности конечноэлементного анализа для определения областей сгущения узлов и элементов. В процессе сгущения задействуются шаблоны разбиения элементов, которые предложены для наиболее распространенных элементов (треугольников, четырехугольников, тетраэдров и шестигранников), с репроекцией на границу области граничных узлов. Показаны примеры построения адаптивных дискретных моделей при решении двух- и трехмерных задач исследования напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: дискретная модель, форма изделия, неявная функция, R-функция, метод конечных элементов.

Введение

Важной частью проектирования сложных технических объектов является исследование их эксплуатационных характеристик. В таких отраслях, как ракетостроение, судостроение, машиностроение, строительство и т. п., при проектировании возникает необходимость исследования напряженно-деформированного состояния, прочности или устойчивости элементов конструкций. При этом, как правило, для моделирования используют системы дифференциальных уравнений в частных производных, которые не имеют аналитического решения. Один из наиболее распространенных численных методов – метод конечных элементов, основан на идее замены непрерывной модели ее дискретным аналогом. При этом форма изделия моделируется множеством простых фигур (например, тетраэдров или шестигранников).

Первым этапом моделирования поведения некоторого изделия является задание его формы. При этом одним из наиболее универсальных – функциональный подход [1–3] к описанию моделей форм изделий. Он позволяет использовать неявные функции и логические операции над ними для определения форм сложных объектов. Однако, в общем случае, неявность и сложность результирующих функций не позволяют напрямую генерировать дискретные модели. В результате актуальной является разработка методов построения дискретных моделей форм изделий, позволяющих исследовать их поведение с заданной точностью.

Целью исследования является разработка метода построения адаптивных дискретных моделей форм изделий, которые представлены функционально.

На сегодня предложены весьма эффективные методы построения дискретных моделей форм на базе треугольных [4], четырехугольных [5], тетраэдрических [6] и шестигранных элементов [7]. Они позволяют аппроксимировать геометрические особенности изделий, но не учитывают точность моделирования поведения изделия.

Для повышения точности моделирования используют адаптивные дискретные модели. Наиболее распространенные методы построения адаптивных дискретных моделей основаны на локальном увеличении числа узлов и элементов [8], поиске оптимальных координат узлов или аппроксимации на конечных

элементах функциями высоких порядков [9]. Поиск оптимальных координат узлов, как правило, самостоятельно не позволяет существенно повысить точность моделирования и используется совместно с другими методами. Увеличение числа узлов и элементов в областях наихудшей аппроксимации является наиболее распространенным. Однако при его применении возникает необходимость коррекции положений граничных узлов. Задействование аппроксимации решения на конечных элементах функциями высоких порядков позволяет повысить точность моделирования, но существенно повышает алгоритмическую сложность и в некоторых случаях может приводить к плохой сходимости численного решения.

1. Функциональный подход к моделированию форм изделий

Основная идея функционального подхода состоит в использовании неявных функций для представления формы изделия. Например, функция

$$\text{circle}(x, y, r) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2}, \quad r > 0,$$

больше нуля в середине области, ограниченной окружностью радиуса r с центром в начале координат, равна нулю на границе этой области и меньше нуля во внешних для нее точках. Более сложные формы можно описать при помощи R-функций [1–3], которые соответствуют логическим операциям. Их объединяют в системы, среди которых одной из наиболее распространенных является

$$\begin{cases} \neg x = -x, \\ x \wedge y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

где x и y – значения неявных функций, соответствующих формам областей (примитивам), участвующим в соответствующей операции. Например, форма фланца (рис. 1) может быть задана функцией

$$\begin{aligned} \text{flange}(x, y) = & [\text{rectangle}(x - 60, y - 50, 80, 100) \vee \\ & \vee \text{rectangle}(x - 50, y - 50, 100, 60) \vee \text{circle}(x - 20, y - 20, 20) \vee \\ & \vee \text{circle}(x - 20, y - 80, 20) \vee \text{circle}(x - 100, y - 50, 50)] \wedge \\ & \wedge \neg \text{circle}(x - 100, y - 50, 30) \wedge \neg \text{circle}(x - 20, y - 20, 10) \wedge \\ & \wedge \neg \text{circle}(x - 20, y - 80, 10), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\text{rectagle}(x, y, w, h) = \left(1 - \frac{4x^2}{w^2}\right) \wedge \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$.

2. Построение дискретных моделей форм изделий

Пусть дана неявная функция F , соответствующая некоторой форме объекта, и для области, полностью включающей в себя этот объект, построена начальная дискретная модель B . При этом B состоит из элементов, форма которых соответствует требуемой. Для генерации дискретной модели можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Из дискретной модели B удалить все узлы, в которых функция F меньше или равна нулю, а также инцидентные в этих узлах элементы.

2. Для каждого граничного узла из дискретной модели B вычислить направление поиска границы как среднее арифметическое нормалей к смежным в нем граням (ребрам в двухмерном случае).

3. Для каждого граничного узла из дискретной модели B вычислить проекцию на границу объекта как точку пересечения луча с вершиной в этом узле и направлением, совпадающим с найденной на предыдущем шаге нормалью. Проекции на границе, находящиеся на малом расстоянии от геометрических особенностей объекта, переместить в соответствующие точки.

4. Для каждой граничной грани дискретной модели B сформировать приграничные элементы, которые разбивают плоскость или объем, образованные граничными вершинами и их проекциями. В двухмерном случае каждому граничному ребру будет соответствовать пара вершин на границе. Соответственно, если B состоит из четырехугольников, то в модель добавляется один четырехугольник; если B состоит

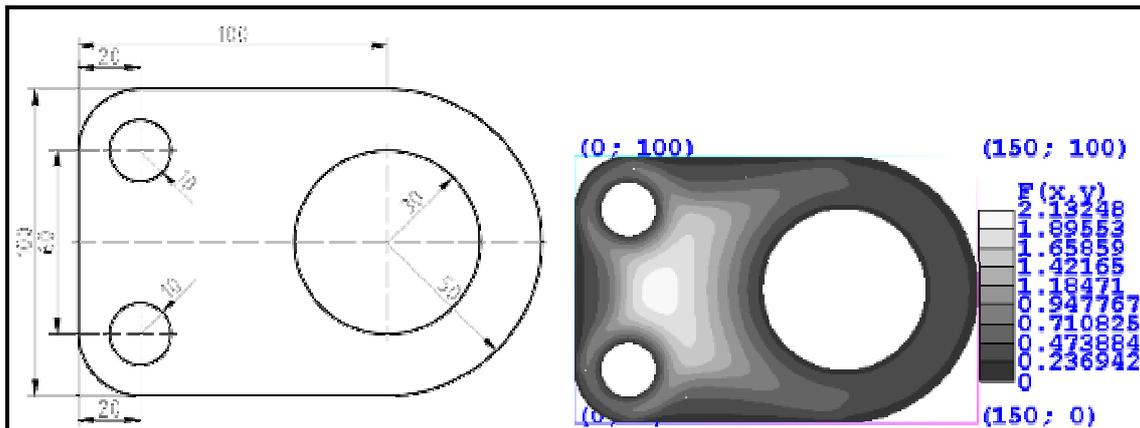


Рис. 1. Чертеж фланца и распределение значений функции (1)

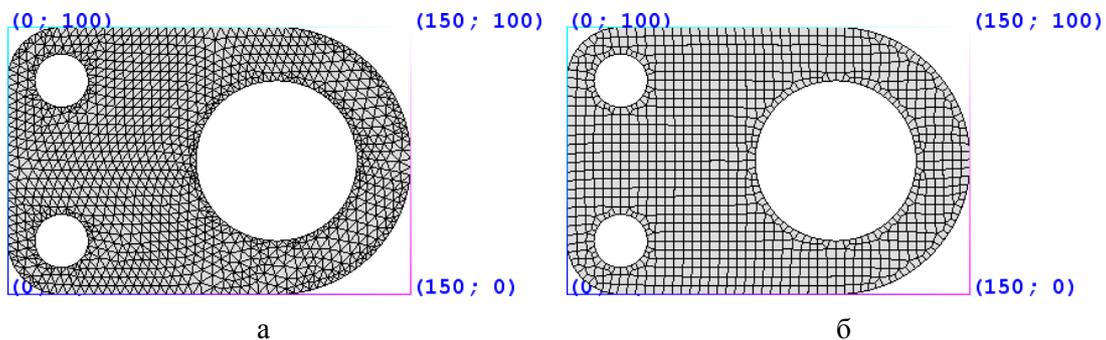


Рис. 2. Дискретные модели формы фланца на базе:
а – треугольников; б – четырехугольников

из треугольников, то добавляется пара треугольников проведением диагонали в четырехугольнике, образованном вершинами и их проекциями. В трехмерном случае, если B состоит из тетраэдров, то узлы граничных граней со своими проекциями будут образовывать треугольные призмы, которые проведением диагоналей разбиваются на три новых тетраэдра. Если B состоит из шестигранников, то каждой четырехугольной граничной грани будет соответствовать проекция из четырех точек на границе, которые совместно образуют новый шестигранник.

5. Каждый внутренний узел переместить в центр масс фигуры, образованной соседними узлами. Применить специфичные для элементов локальные преобразования.

Рассмотрим пример построения дискретной модели формы фланца на базе равномерной начальной сетки, состоящей из 45×30 узлов (рис. 2). При использовании треугольников будет получена модель (рис. 2, а) и для четырехугольников – модель, изображенная на рис. 2, б.

3. Построение адаптивных дискретных моделей форм изделий

Полученные при помощи описанного выше алгоритма модели не учитывают точности аппроксимации решаемой задачи. Для этого необходимо дискретную модель формы объекта сгущать в процессе конечноэлементного анализа. Так, в двухмерных моделях, основанных на треугольных элементах, каждый треугольник можно разбить на четыре новых добавлением узлов в середины его сторон (рис. 3). Эта схема известна под названием «зеленые треугольники» [10]. Она позволяет выполнять равномерное разбиение дискретных моделей на базе треугольных элементов.

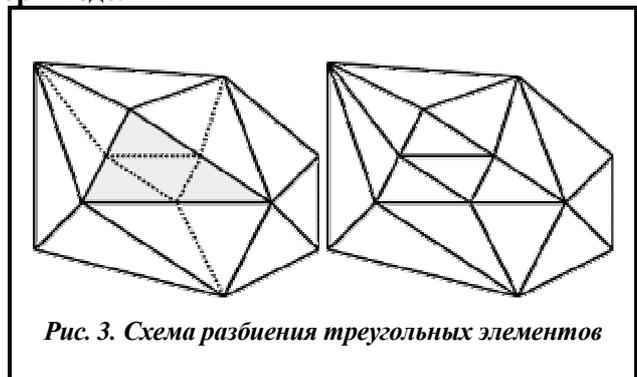


Рис. 3. Схема разбиения треугольных элементов

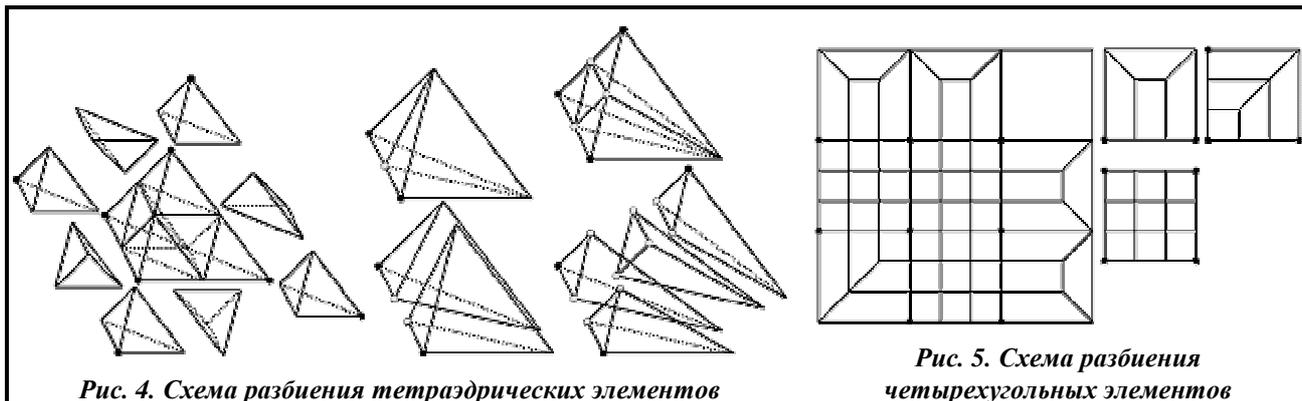


Рис. 4. Схема разбиения тетраэдрических элементов

Рис. 5. Схема разбиения четырехугольных элементов

Схема «зеленые треугольники» может быть обобщена на случай тетраэдров. Вставкой новых узлов в середины своих сторон тетраэдр может быть разбит на восемь элементов (рис. 4). Если у соседнего тетраэдра с разбиваемым есть общее ребро, то он разбивается на два элемента вставкой нового узла в середину общего ребра. Если у соседнего тетраэдра с разбиваемым есть общая грань, то он разбивается на четыре элемента путем добавления новых узлов в середины ребер, которые принадлежат общей грани. Таким образом, для тетраэдров получается три шаблона разбиения.

Для дискретных моделей на базе четырехугольных элементов можно использовать схему разбиения элемента на девять частей (рис. 5) [11]. При этом для соседних элементов будет достаточно двух шаблонов. Если у соседнего элемента есть общее ребро, то он разбивается на четыре части. Если элемент касается разбиваемых элементов двумя смежными ребрами, то он разбивается на пять частей. В результате для четырехугольников получается три основных шаблона.

В случае дискретных моделей на базе шестигранных элементов каждый шестигранник, подлежащий разбиению, делится на 27 частей (рис. 6) [11]. Если у некоторого элемента ребро участвует в разбиении, то он делится на пять частей. Если у элемента грань участвует в разбиении, то он делится на тринадцать частей. Если в разбиении участвуют три вершины, которые принадлежат одной грани, то элемент разбивается на шесть частей. Если в разбиении участвуют шесть вершин, которые принадлежат двум граням с общим ребром, то такой элемент делится на пять частей. В двух последних случаях получаются элементы, к которым рекурсивно нужно применить один из двух первых шаблонов.

В результате для каждой формы элемента определены основные типы шаблонов. Всего их, с учетом вращения, для треугольников – 8, тетраэдров и четырехугольников – 16, шестигранников – 256. Соответственно можно сформулировать следующий алгоритм.

1. Для объекта, форма которого определена неявной функцией F , построить начальную дискретную модель B .
2. При помощи конечноэлементного анализа получить аппроксимацию искомой величины в узлах дискретной модели B .
3. Если существуют элементы, для которых оценка точности, полученная при помощи функции еггог, больше заданной величины ϵ , то разбить эти и соседние элементы в соответствии с шаблонами. Перейти на шаг 2. Иначе – конец работы алгоритма.

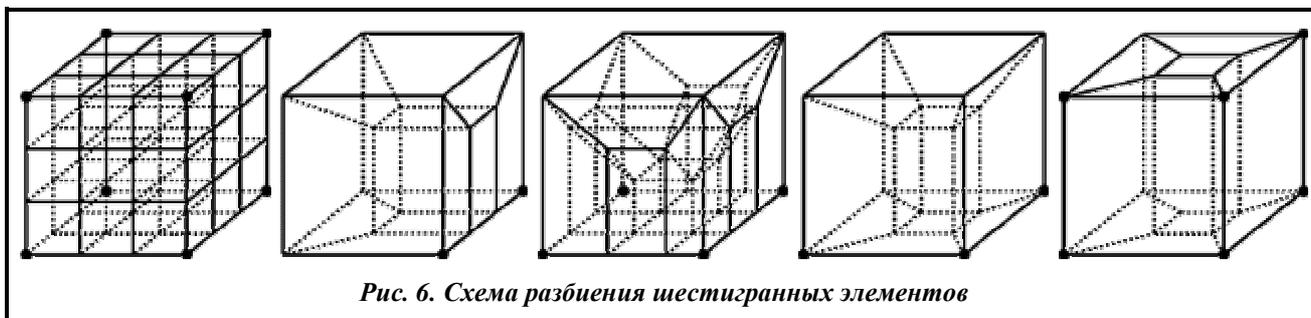


Рис. 6. Схема разбиения шестигранных элементов

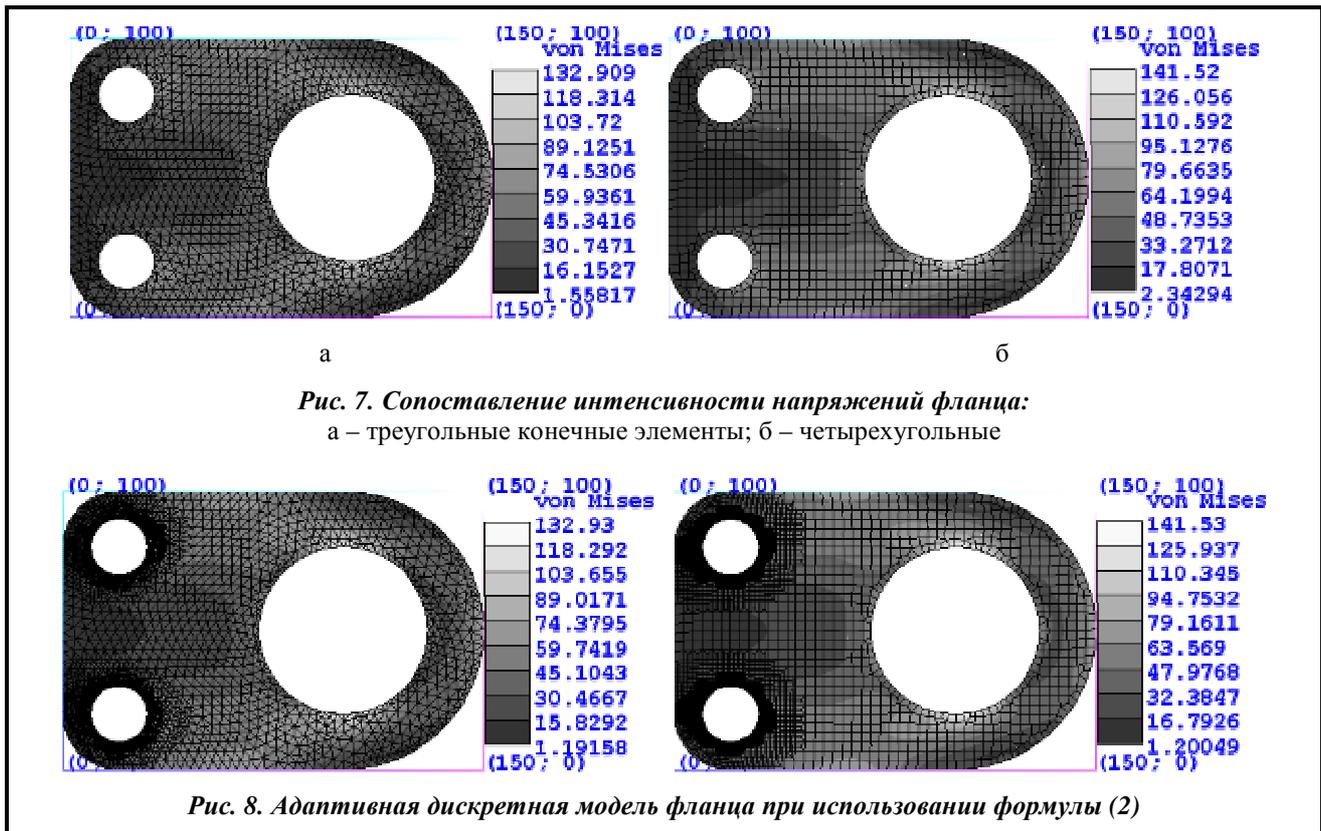


Рис. 7. Сопоставление интенсивности напряжений фланца:
а – треугольные конечные элементы; б – четырехугольные

Рис. 8. Адаптивная дискретная модель фланца при использовании формулы (2)

В качестве тестового примера рассмотрим задачу исследования напряженно-деформированного состояния фланца (рис. 7). В безразмерных величинах толщина принимается равной 20, модуль Юнга – 200000, коэффициент Пуассона – 0,33. Считается, что фланец находится под действием силы, равномерно распределенной по отверстию радиуса 30, с интенсивностью 20, вектор которой совпадает с осью абсцисс. Оба отверстия радиуса 10 жестко защемлены.

В результате конечноэлементного анализа плосконапряженного состояния фланца получено, что при использовании треугольных конечных элементов (линейные функции формы) перемещения в первом направлении (x) находятся в интервале $[0; 0,0497]$, во втором направлении (y) – $[-0,0168; 0,0168]$, напряжения σ_{xx} – $[-24,683; 128,299]$, σ_{yy} – $[-67,017; 67,624]$, τ_{xy} – $[-43,924; 46,691]$, интенсивность напряжений по Мизесу σ_i – $[1,558; 132,909]$ (рис. 7, а). При использовании четырехугольных элементов (билинейная функция формы) перемещения в первом направлении (x) находятся в интервале $[0; 0,0503]$, во втором направлении (y) – $[-0,0172; 0,0172]$, напряжения σ_{xx} – $[-31,130; 141,285]$, σ_{yy} – $[-77,568; 71,964]$, τ_{xy} – $[-47,566; 47,151]$, интенсивность напряжений по Мизесу σ_i – $[2,343; 141,520]$ (рис. 7, б).

Распространенные техники определения областей для сгущения числа узлов и элементов используют различные оценки точности результата. Простейшим способом оценки точности (при неизвестном точном решении) является сопоставление изменения узловых значений со средним на элементе [12]. В таком случае функция error, используемая в алгоритме адаптивного конечноэлементного анализа, примет вид

$$\text{error}(e, \mathbf{C}) = \max_{i, j \in e} \frac{C_i - C_j}{|\mathbf{C}|}, \quad (2)$$

где e – элемент; $|\mathbf{C}|$ – число вершин в элементе; \mathbf{C} – вектор узловых значений.

При использовании формулы (2) в алгоритме построения адаптивной дискретной модели (если \mathbf{C} – длина вектора перемещений, ограничение на максимально допустимую погрешность на элементе $\varepsilon=0,4$) в результате трех итераций для обеих форм конечных элементов сгущение будет около отверстий радиуса 10 (рис. 8).

В практике инженерного анализа возникает не только задача исследования напряженно-деформированного состояния, но и прочности конструкций. В таком случае принципиальный интерес для исследователя представляют области с наибольшей интенсивностью напряжений. Соответственно, сгущать дискретные модели необходимо в областях с наибольшим изменением интенсивности напряжений (или другого скаляра, интересующего исследователя). При $\varepsilon=0,2$, если C – интенсивность напряжений по Мизесу σ_i , то для обеих форм конечных элементов сгущение будет в окрестностях отверстия радиуса 30, где наибольшее относительное изменение σ_i (рис. 9).

Для исследования напряженно-деформированного состояния фланца в трехмерной постановке можно использовать функцию

$$\text{flange3}(x, y, z) = \text{flange}(x, y) \wedge z \wedge (20 - z).$$

В трехмерном случае при использовании моделей на базе и тетраэдров, и шестигранников (рис. 10) для адаптивного конечноэлементного анализа, если ограничение на максимально допустимую погрешность на элементе $\varepsilon=0,2$, а C – интенсивность напряжений по Мизесу σ_i , то зоны сгущения будут аналогичны представленным выше двумерным.

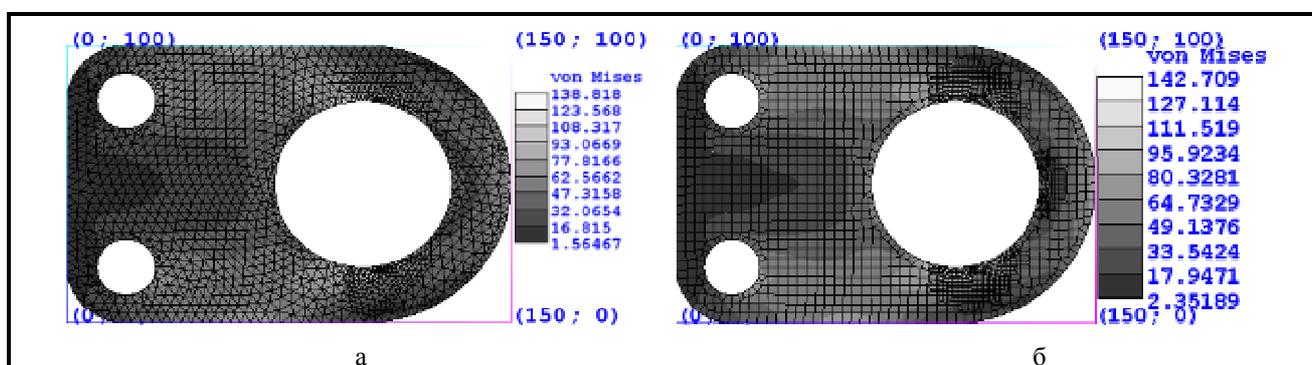


Рис. 9. Адаптивная дискретная модель фланца при использовании интенсивности напряжений для контроля точности

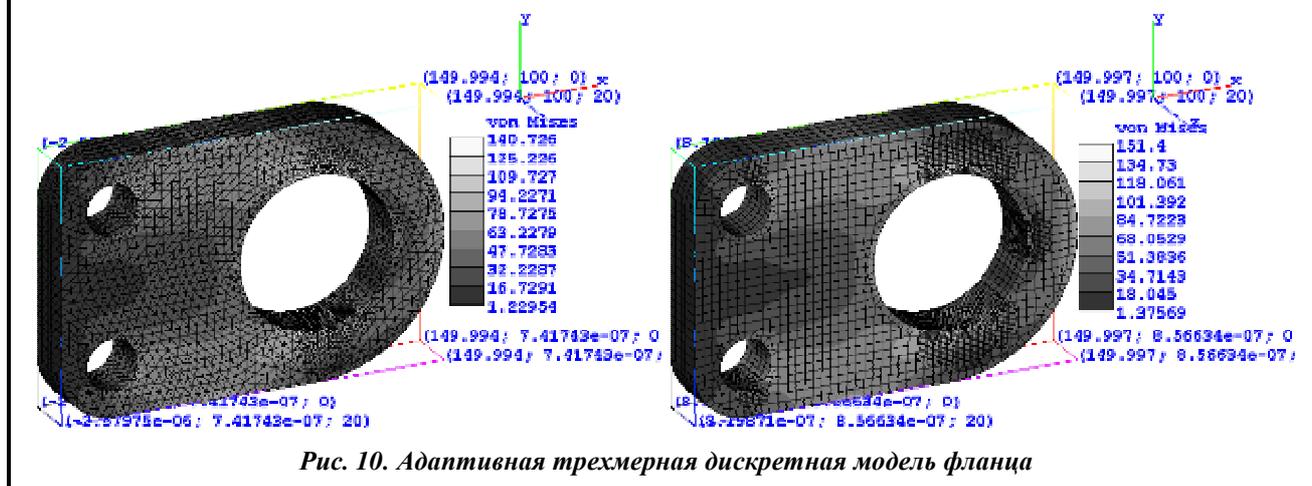


Рис. 10. Адаптивная трехмерная дискретная модель фланца

Обсуждение результатов работы

Необходимо отметить, что разность численных значений в экстремальных значениях напряжений между обычным и адаптивным анализом составляет несколько процентов. Если сравнивать результаты для плосконапряженного состояния с результатами для трехмерных моделей, то получаем разность порядка 10%, что объясняется используемыми упрощаемыми гипотезами для двумерного случая.

Результаты, полученные в данной работе, в отличие от [4–7] позволяют строить дискретные модели для форм изделий с учетом не только геометрических особенностей, но и точности аппроксимации интересующей исследователя величины.

Выводы

Таким образом, основным научным результатом исследования является новый метод построения адаптивных дискретных моделей форм изделий, которые представлены функционально. Предложенный метод, в отличие от существующих, основан на анализе результатов метода конечных элементов, а не только геометрической информации.

Алгоритм метода может быть использован для построения адаптивных дискретных моделей на базе элементов произвольной формы. В его основе лежит идея использования шаблонов для перестройки дискретных моделей геометрических объектов.

Численная сходимость подтверждается сопоставлением результатов для моделей, основанных на элементах различной формы, с разным числом элементов, а также сравнением двухмерных и трехмерных случаев.

Перспективы дальнейших исследований связаны с использованием методов машинного обучения для прогнозирования областей, в которых необходимо сгущать дискретные модели.

Данная работа выполнена в рамках исследований по госбюджетной теме «Разработка математического обеспечения для инженерного анализа объектов аэрокосмической техники на базе облачных технологий», 0117U007204.

Литература

1. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Київ: Наук. думка, 1982. 552 с.
2. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
3. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Математическое моделирование геометрических фракталов с помощью R-функций. *Кибернетика и систем. анализ.* 2012. Т. 48. № 4. С. 155–162.
4. Лисняк А. А. Способ построения дискретных математических геометрических объектов, заданных с помощью R-функций. *Вісн. Запоріж. нац. ун-ту.* Фіз.-мат. науки. 2013. № 1. С. 59–69.
5. Чопоров С. В. Сглаживание сеток четырехугольных элементов с использованием локальной минимизации функционала. *Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та.* 2017. Т. 2. № 3(62). С. 234–239.
6. Лисняк А. А. Дискретизация границы трехмерных моделей геометрических объектов, заданных с помощью R-функций. *Радіоелектроніка, інформатика, управління.* 2014. № 1. С. 82–88. DOI: 10.15588/1607-3274-2014-1-12
7. Чопоров С. В. Построение неравномерных дискретных сеток для функциональных математических моделей на базе теории R-функций. *Радиоелектроніка, інформатика, управління.* 2011. № 2. С. 70–75.
8. Babuska I., Flaherty J. E., Henshaw W. D., Hopcroft J. E., Oliger J. E., Tezduyar T. Modeling, Mesh Generation, and Adaptive Numerical Methods for Partial Differential Equations. *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications.* New York: Springer-Verlag, 1995. Vol. 75. 450 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-4248-2
9. Schwab C. p- and hp- Finite Element Methods. London: Clarendon, 1999. 386 p.
10. Bank R. E. PLTMG: A Software Package for Solving Elliptic Partial Differential Equations: Users' Guide 8.0. SIAM, 1998. 155 p. DOI: 10.1137/1.9780898719635
11. Schneiders R. Octree-Based Hexahedral Mesh Generation. *Intern. J. Computational Geometry & Appl.* 2000. Vol. 10. Iss. 4. P. 383–398. DOI: 10.1142/S021819590000022X
12. Tristano J. R., Chen Z., Hancq D. A., Kwok W. Fully automatic adaptive mesh refinement integrated into the solution process. *Intern. Meshing Roundtable: Proc. the 12th Intern. Conf., Santa Fe, New Mexico, U.S.A., 14–17 September 2003.* Sandia National Laboratories, 2003. P. 307–314.

Поступила в редакцию 12.10.2018