

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КОМПОЗИТУ У ВИГЛЯДІ ШАРУ ТА ПІВПРОСТОРУ З ПОВЗДОВЖНЬОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ, ЗА ЗАДАНИХ НА ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХНЯХ НАПРУЖЕНЬ

В. Ю. Мірошніков,

канд. техн. наук

m0672628781@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9491-0181

Харківський національний
університет будівництва та
архітектури,

61002, Україна, м. Харків,
вул. Сумська, 40

Запропоновано аналітико-числовий підхід до розв'язання просторової задачі теорії пружності для півпростору, жорстко зчепленого з шаром. В півпросторі, паралельно його межах, розташована нескінченна кругова циліндрична порожнина. Півпростір та шар – однорідні ізотропні матеріали, відмінні один від одного. Необхідно дослідити напружено-деформований стан пружних тіл шару та півпростору. На поверхні порожнини та на верхній межі шару задані напруження. На плоскій поверхні контакту шару та півпростору вивчаються умови спряження. Розв'язок просторової задачі теорії пружності отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних із порожниною, та декартових координатах, пов'язаних із шаром та півпростором. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані в результаті задовольнення граничних умов та умов спряження, розв'язано методом зрізання. В результаті отримані переміщення та напруження в різних точках пружного шару та пружного півпростору. Виконання граничних умов доведено до 10^{-4} за рахунок підібраного параметра зрізання для заданих геометричних характеристик. Проведено аналіз напружено-деформованого стану шару та півпростору за заданих фізичних та геометричних параметрів. Подані графіки напружень на межі шару та півпростору, на поверхні порожнини та верхній межі шару, а також на перехіді між порожниною та межею півпростору. Зазначені графіки напружень показують, що найбільші напруження концентруються на поверхні циліндричної порожнини та на поверхні півпростору. Запропонований метод може використовуватись для розрахунку деталей, підземних споруд та комунікацій, розрахункові схеми яких відповідають постановці задачі даної роботи. Наведений аналіз напруженого стану може бути використаний для підбору геометричних параметрів на стадії проектування, а графік напружень на межі шару та півпростору – для аналізу міцності з'єднання.

Ключові слова: циліндрична порожнина в півпросторі, композит, рівняння Ламе, умови спряження, узагальнений метод Фур'є.

Вступ

Під час проектування складних технічних підземних споруд та комунікацій, а також деталей з композитних матеріалів, що містять циліндричні порожнини, необхідно мати уявлення про напружений стан, який виникає в цих елементах. Для цього необхідно мати метод розрахунку, який би давав можливість отримувати результат з необхідною точністю.

Найбільш розвинутою є тема, коли порожнина розташована поперечно межах пластини або шару [1–4]. Однак методи, які в них використовуються, не можуть бути застосовані для шару з повздовжньою порожниною чи включенням. Для таких випадків в роботах [5–7], на основі методу розкладання в ряди Фур'є або за допомогою методу зображень, розглянуті стаціонарні задачі дифракції хвиль та визначення напружень.

Для задач з декількома граничними поверхнями необхідно застосовувати узагальнений метод Фур'є [8], який і покладений в основу даної роботи.

На основі узагальненого методу Фур'є розв'язані задачі для півпростору з циліндричною порожниною або включенням [9–13], для циліндра з циліндричними включеннями [14], для шару з циліндричною порожниною або включенням [15, 16] та для шару з повздовжньою товстостінною трубою [17].

Задача для півпростору з повздовжньою циліндричною порожниною та жорстко зчепленим до півпростору шаром раніше не вивчалась, але зустрічається в розрахункових схемах, тому є актуальною.

Постановка задачі

В пружному однорідному півпросторі розташована кругова циліндрична порожнина радіусом R . З межею півпростору ідеально зчеплений шар (рис. 1).

© В. Ю. Мірошніков, 2019

Порожнину будемо розглядати в циліндричній системі координат (ρ, φ, z) , шар – в декартовій системі координат (x_1, y_1, z_1) , півпростір – в декартовій системі координат (x_2, y_2, z_2) , поєднаний з системою координат порожнини. Межі шару розташовані на відстані $y_1=h_1$ та $y_1=0$, півпростір $y_2=h_2$, при $h_2>R$.

Необхідно знайти розв'язок рівняння Ламе

$$\Delta \bar{U}_j + (1 - 2\sigma_j)^{-1} \nabla \operatorname{div} \bar{U}_j = 0,$$

де $j=1$ – відповідає шару, $j=2$ – півпростору. На верхній межі шару $y_1=h_1$ та на поверхні порожнини $\rho=R$ задані напруження

$$F_1 \bar{U}_1(x, z) \Big|_{y_1=h_1} = \bar{F}_h^0(x, z), \quad F_2 \bar{U}_2(\varphi, z) \Big|_{\rho=R} = \bar{F}_R^0(\varphi, z),$$

де

$$\bar{F}_h^0(x_1, z_1) = \tau_{yx}^{(h)} \bar{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(h)} \bar{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(h)} \bar{e}_3^{(1)},$$

$$\bar{F}_R^0(\varphi, z) = \sigma_\rho^{(R)} \bar{e}_1^{(2)} + \tau_{\rho\varphi}^{(R)} \bar{e}_2^{(2)} + \tau_{\rho z}^{(R)} \bar{e}_3^{(2)}$$

відомі функції; $\bar{e}_j^{(k)}$, $j=1, 2, 3$ – орти декартової ($k=1$) та циліндричної ($k=2$) систем координат.

На межі шару і півпростору задані умови спряження

$$\bar{U}_1(x_1, z_1) \Big|_{y_1=0} = \bar{U}_2(x_2, z_2) \Big|_{y_2=h_2}, \quad (2)$$

$$F_1 \bar{U}_1(x_1, z_1) \Big|_{y_1=0} = F_2 \bar{U}_2(x_2, z_2) \Big|_{y_2=h_2}, \quad (3)$$

де \bar{U}_1 – переміщення в шарі; \bar{U}_2 – переміщення в півпросторі;

$F_j \bar{U}_j = 2G_j \left[\frac{\sigma_j}{1-2\sigma_j} \bar{n} \operatorname{div} \bar{U}_j + \frac{\partial}{\partial n} \bar{U}_j + \frac{1}{2} (\bar{n} \times \operatorname{rot} \bar{U}_j) \right]$; $G_j = \frac{E_j}{2(1+\sigma_j)}$; σ_j, E_j – коефіцієнт Пуассона і модуль пружності шару ($j=1$) або півпростору ($j=2$).

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадними до нуля на далеких відстанях від початку координат за координатою z для труби та координатами x і z для меж шару.

Розв'язання задачі

Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [8]

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}, \\ \bar{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}, \\ \bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} \left[(\operatorname{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right]; \quad k=1, 2, 3; \end{aligned} \quad (4)$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \bar{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\bar{e}_3^{(1)} \cdot); \quad N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \bar{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\bar{e}_3^{(2)} \cdot); \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де m – член ряду Фур'є; σ – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x), K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\bar{R}_{k,m}, \bar{S}_{k,m}$, $k=1, 2, 3$ – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндра; $\bar{u}_k^{(-)}, \bar{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для шару.

Розв'язок задачі подамо у вигляді



Рис. 1. Півпростір з циліндричною порожниною та шаром

$$\bar{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x_1, y_1, z_1; \lambda, \mu; \sigma_1) + \tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x_1, y_1, z_1; \lambda, \mu; \sigma_1)) d\mu d\lambda, \quad (5)$$

$$\bar{U}_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda; \sigma_1) d\lambda + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k^{(2)}(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x_2, y_2, z_2; \lambda, \mu; \sigma_2)) d\mu d\lambda, \quad (6)$$

де $\bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $\bar{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв’язки, які задані формулами (4), а невідомі функції $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов (1) та умов спряження (2) і (3).

Для зв’язку базисних розв’язків в різних системах координат скористаємось формулами [17]

– для переходу від розв’язків $\bar{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв’язків шару $\bar{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\bar{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3; \\ \bar{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \bar{u}_1^{(\mp)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(\mp)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– для переходу від розв’язків $\bar{u}_k^{(+)}$ та $\bar{u}_k^{(-)}$ шару до розв’язків $\bar{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad (k=1, 3); \\ \bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

де $\bar{R}_{k,m} = \tilde{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda z)}$;

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{1,n}(\rho, \lambda) &= \bar{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right); \\ \tilde{b}_{2,n}(\rho, \lambda) &= \bar{e}_{\rho} \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho \cdot I''_n(\lambda\rho) \right] + \bar{e}_{\varphi} i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma-1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda \rho I'_n(\lambda\rho); \\ \tilde{b}_{3,n}(\rho, \lambda) &= - \left[\bar{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right], \end{aligned}$$

\bar{e}_{ρ} , \bar{e}_{φ} , \bar{e}_z – орти в циліндричній системі координат.

Для виконання граничних умов на верхній межі шару $y_1 = h_1$ знайдемо напруження для (5) та прирівняємо заданому $\bar{F}_h^0(x, z)$, поданому у вигляді подвійного інтеграла Фур’є. Так отримуємо три рівняння (по одному на кожну проекцію) з шістьма невідомими $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$.

Для виконання умов спряження підставимо в (2) вирази (5) та (6), скориставшись формулою переходу від базисних розв’язків $\bar{S}_{k,m}$ циліндра до $\bar{u}_k^{(-)}$ шару (7). Подібну операцію проведемо для напружень (3).

Отримавши систему з дев’яти нескінченних рівнянь, виразимо з них $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ та $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Визначник Δ цієї системи має вигляд

$$\Delta = -\frac{64 \cdot \gamma^9 \cdot \sigma^3 \cdot e^{-3\gamma(h_1-h_2)} \cdot \Phi(\gamma)}{\lambda^6},$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$; $\Phi(\gamma)$ – функція, яка має громіздкий вигляд і, як наслідок, опущена. Дослідження $\Phi(\gamma)$ показало, що, при $\gamma > 0$ вона має тільки додатні значення та не обертається на нуль, як наслідок, система рівнянь має єдиний розв’язок.

Для виконання граничних умов на поверхні порожнини $\rho=R$, використовуючи формули переходу від розв’язків $\bar{y}_k^{(+)}$ до розв’язків $\bar{R}_{k,m}$ (8), праву частину (6) перепишемо в циліндричній системі координат. Для отриманого вектора знайдемо напруження та прирівняємо заданому $\bar{F}_R^0(\varphi, z)$, поданому інтегралом та рядом Фур’є. Замість $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ підставимо отримані вирази через функції $B_{k,m}(\lambda)$. В результаті отримаємо сукупність трьох нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $B_{k,m}(\lambda)$.

Ці системи мають властивості рівнянь другого роду і, як наслідок, до них можна застосовувати метод редукції [18]. Числові дослідження також показали, що визначник зрізаної системи не обертається на нуль ні за якого m , для $0 \leq m \leq 12$, як наслідок, ця система рівнянь має єдиний розв’язок.

Отримавши значення функцій $B_{k,m}(\lambda)$, можемо знайти значення невідомих $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$, які ми раніше виразили через $B_{k,m}(\lambda)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Числові дослідження напруженого стану

Циліндрична порожнина розташована в ізотропному однорідному півпросторі, ідеально зчепленому з ізотропним однорідним шаром. Фізичні характеристики шару (бетон класу В30): коефіцієнт Пуассона $\sigma_1=0,16$, модуль пружності $E_1=3250$ кН/см². Фізичні характеристики півпростору (газобетон): $\sigma_2=0,2$, $E_2=160$ кН/см². Радіус циліндричної порожнини $R=10$ см. Товщина шару $h_1=10$ см. Відстань від межі півпростору до центру циліндричної порожнини $h_2=15$ см.

На верхній межі шару задані напруження від дії технологічного обладнання у вигляді хвилі по осі z та по осі x $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot (x^2 + 10^2)^{-2}$, $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на поверхні циліндричної порожнини – напруження $\sigma_\rho^{(R)} = \tau_{\rho\varphi}^{(R)} = \tau_{\rho z}^{(R)} = 0$.

Точність виконання граничних умов залежить від порядку системи m та відстані між граничними поверхнями. Для запропонованих геометричних характеристик точність виконання граничних умов на поверхні шару в залежності від m вказана в табл. 1.

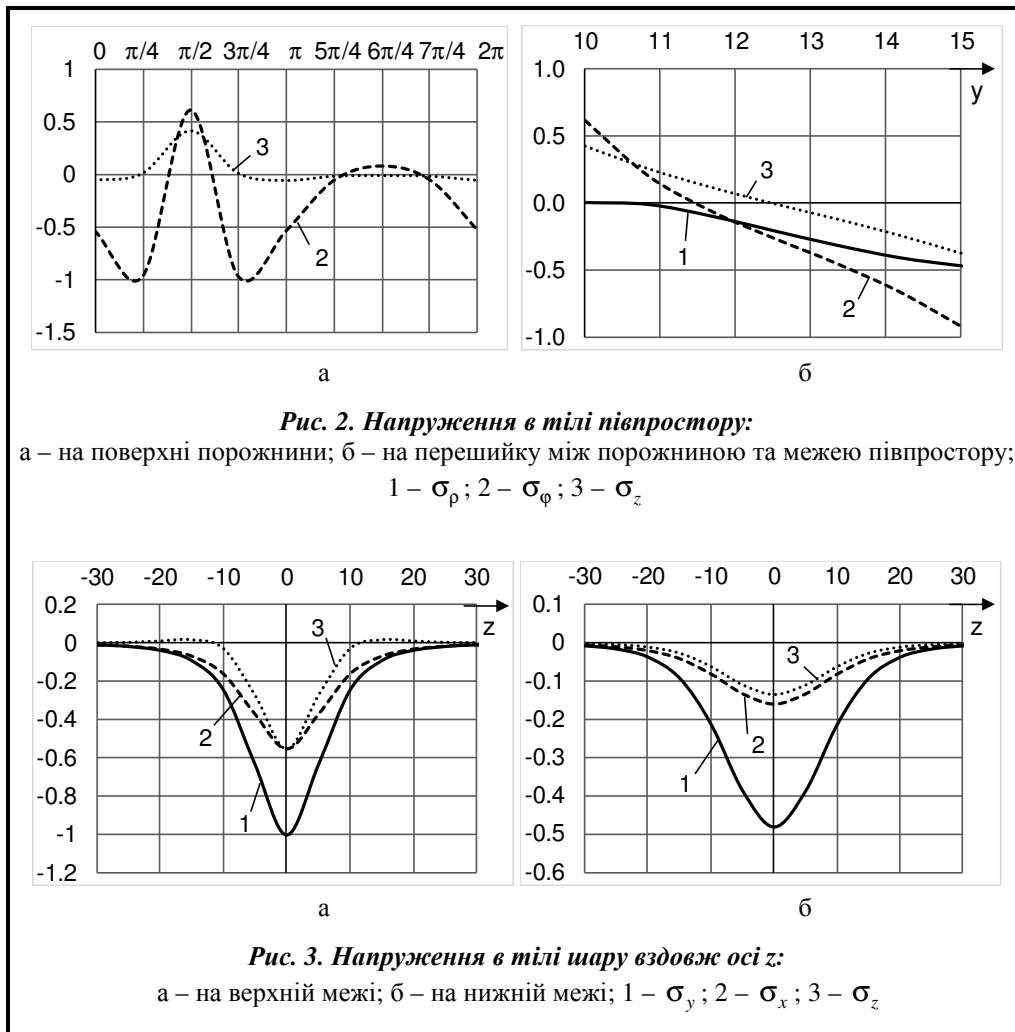
Таблиця 1. Похибка виконання граничних умов

Поверхня для розрахунку	Задано	Отримані результати, σ_y , кН/см ²				
		$m=4$	$m=6$	$m=8$	$m=10$	$m=12$
На поверхні шару	1	0,98398	0,98855	0,99536	0,99961	0,99991
На поверхні порожнини	0	0,00412	0,00062	0,00011	0,00004	10^{-6}

Розв’язувалась скінченна система рівнянь порядку $m=12$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона (для функцій, що мають $e^{i\lambda z} d\lambda$ та $e^{i\mu x} d\mu$) та Сімпсона (для інших функцій).

На рис. 2 наведені напруження (в кН/см²) в тілі півпростору при $z=0$. На рис. 2, а подані напруження на поверхні циліндричної порожнини від $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, на рис. 2, б – на перехідку між циліндричною порожниною та межею півпростору вдовж осі y .

Найбільші напруження σ_φ виникають на поверхні порожнини при $\varphi=0,63$ та $\varphi=2,51$ (рис. 2, а).



Щодо перешийка (рис. 2, б), напруження σ_ϕ та σ_z на поверхні порожнини є додатними, а на межі півпростору змінюються на від'ємні.

На рис. 3 наведені напруження (в кН/см^2) на верхній (рис. 3, а) та на нижній (рис. 3, б) межі шару вздовж осі z в площині $x=0$.

За заданих напружень σ_y (рис. 3, а, лінія 1), напруження σ_x та σ_z на верхній межі півпростору, при $z=0$, набувають майже однакових значень. Далі вздовж осі z напруження σ_x та σ_z поступово зменшуються, крім того, напруження σ_z при $|z| \geq 13$ см мають додатні значення (рис. 3, а, лінія 3).

На нижній межі шару (рис. 3, б) напруження σ_x та σ_z поступово зменшуються, набуваючи тільки від'ємних значень.

Напруження σ_z вдвож осі x мають майже такий самий вигляд, як і вдвож осі z (рис. 3, б, лінія 3). Напруження σ_x вдвож осі x , на відміну від напруження σ_x вдвож осі z (рис. 3, б, лінія 2), спадають дещо швидше. Через незначні відміни графіка напружень вдвож осі z (рис. 3, б) від графіка напружень вдвож осі x , останній опущений.

Висновки

За допомогою узагальненого методу Фур'є розроблений аналітико-числовий метод розв'язання просторової задачі теорії пружності для півпростору з розташованою в ньому повздожньою порожниною та зчепленим пружним шаром. Задача зведена до сукупності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які розв'язуються методом редукції до скінченної системи.

Наведені графіки дають картину розподілу напружень на верхній поверхні шару, на межі з'єднання шару та півпростору, а також на поверхні порожнини.

Напруження σ_x та σ_z , знайдені на межі шару та півпростору, можуть використовуватись для розрахунку міцності з'єднання.

В порівнянні з роботами [5–7] запропонований метод дозволяє отримати точний розв'язок задачі в просторовому варіанті, а в порівнянні з [9–17] – урахувати нові граничні поверхні, додавши до граничних умов умови спряження шару та півпростору.

Числовий аналіз напружено-деформованого стану наведеного композиту показує:

– найбільші напруження концентруються на поверхні циліндричної порожнини (рис.2, а) та на поверхні півпростору (рис. 2, б);

– напруження σ_z на поверхні шару мають як додатні, так і від'ємні значення;

Числові дослідження алгебраїчної системи для заданого композиту дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції (табл. 1). Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов. Для геометричних параметрів розв'язаної задачі при $m=12$ граничні умови виконуються з точністю 10^{-4} . Зі збільшенням порядку системи m точність розрахунків буде зростати.

Для перевірки достовірності, матеріали шару та півпростору були задані однаковими. Фізичні та геометричні характеристики були прийняті такими, як в роботі [10], а потім – як в роботі [11].

Порівняння (при $m=10$) напруженого стану перехідку з результатами, отриманими в роботі [10], зведені в табл. 2.

Таблиця 2. Порівняльний аналіз результатів з роботою [10]

Дані для порівняння	Отримані результати, σ_y , кН/см ²				
	$y=10$	$y=13,3$	$y=15$	$y=16,7$	$y=20$
Дані роботи [10]	-0,00047	-0,31152	-0,52902	-0,75062	-1,00080
Дані поданої роботи	-0,00047	-0,31153	-0,52889	-0,75060	-1,00077

З табл. 2 видно, що похибка результатів знаходиться на рівні точності розрахунку (табл. 1). Порівняльний аналіз з роботою [11] має аналогічні результати.

Збіжність з відомими результатами та висока точність виконання граничних умов свідчать про достовірність методу та отриманих результатів.

Серед недоліків слід зазначити, що метод не дає можливості розв'язати задачі, коли границі тіл дотикаються або перетинаються.

Подальший розвиток цього напрямку можливий в збільшенні кількості циліндричних порожнин або в розрахунку задачі з іншими крайовими умовами.

Література

1. Vaysfel'd N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion. *Acta Mech.* 2015. Vol. 226. P. 797–810. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>.
2. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса. *Прикл. механика.* 2014. Т. 50. № 6. С. 27–38.
3. Grinchenko V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Soviet Appl. Mech.* 1968. No. 10. P. 31–37. <https://doi.org/10.1007/BF00886618>.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
7. Волчок В. В., Вуколов Д. С., Сторожев В. И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями. *Механика твердого тела.* 2016. Вып. 46. С. 119–133.
8. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.

9. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип.20. С. 253–259.
10. Miroschnikov V. Yu. First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities. *J. Mech. Eng.* 2018. Vol. 21. No. 2. P. 12–18.
11. Protsenko V., Miroschnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European J. Enterprise Techn. Appl. Mech.* 2018. Vol. 4. No. 7. P. 43–50. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>.
12. Николаев А. Г., Щербакова А. Ю., Юхно А. И. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболидальным включением. *Вопр. проектирования и пр-ва конструкций летат. аппаратов*. 2006. Вып. 2. С. 47–51.
13. Miroschnikov V. Yu. Evaluation of the stress-strain state of half-space with cylindrical cavities. *Visnyk Dniprovskoho universytetu. Ser. Mekhanika – Bulletin of the Dnipro University*. 2018. Vol. 26. No. 5. P. 109–118.
14. Николаев А. Г., Танчик Е. А. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами. *Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика. Механіка*. 2013. Т. 18. Вип. 4(20). С. 101–111.
15. Мірошніков В. Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 102. С. 77–90.
16. Мірошніков В. Ю. Змішана задача теорії пружності для шару з циліндричним включенням. *Наук. вісн. буд-ва*. 2019. Т. 96. № 2. С. 247–252. <https://doi.org/10.29295/2311-7257-2019-96-2-247-252>.
17. Miroschnikov V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. *J. Mec. Eng.* 2019. Vol. 22. No. 2. P. 44–52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>.
18. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742с.

Поступила в редакцию 28.08.2019

Исследование напряженного состояния композита в виде слоя и полупространства с продольной цилиндрической полостью при напряжениях, заданных на граничных поверхностях

В. Ю. Мирошников

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,
61002, Украина, г. Харьков, ул. Сумская, 40

Предложен аналитико-численный подход к решению пространственной задачи теории упругости для полупространства, жестко сцепленного со слоем. В полупространстве, параллельно его границам, расположена бесконечная круговая цилиндрическая полость. Полупространство и слой – однородные изотропные материалы, отличные друг от друга. Необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние упругих тел слоя и полупространства. На поверхности полости и на верхней границе слоя заданы напряжения. На плоской поверхности контакта слоя и полупространства возникают условия сопряжения. Решение пространственной задачи теории упругости получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с полостью, и декартовых координатах, связанных со слоем и полупространством. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, полученных в результате удовлетворения граничным условиям и условиям сопряжения, решены методом урезания. В результате получены перемещения и напряжения в различных точках упругого слоя и упругого полупространства. Выполнение граничных условий доведено до 10^4 за счет подобранного параметра урезания для заданных геометрических характеристик. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния слоя и полупространства при заданных физических и геометрических параметрах. Представлены графики напряжений на границе слоя и полупространства, на поверхности полости и верхней границе слоя, а также на перешейке между полостью и границей полупространства. Указанные графики напряжений показывают, что наибольшая концентрация напряжений имеет место на цилиндрической полости и на поверхности полупространства. Предложенный метод может использоваться для расчета деталей, подземных сооружений и коммуникаций, расчетные схемы которых соответствуют постановке задачи данной работы. Приведенный анализ напряженного состояния может быть использован для подбора геометрических параметров на стадии проектирования, а графики напряжений на границе слоя и полупространства – для анализа прочности соединения.

Ключевые слова: цилиндрическая полость в полупространстве, композит, уравнения Ламе, условия сопряжения, обобщенный метод Фурье.