

УДК 624.074.4:681.3

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЛАДКИХ ОБОЛОЧЕК БЕЗ УЧЕТА И С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ

Г. В. Филатов, д-р техн. наук  
[gvmfilatov@gmail.com](mailto:gvmfilatov@gmail.com)  
 ORCID: 0000-0003-4526-1557

Украинский государственный  
 химико-технологический  
 университет,  
 49005, Украина, г. Днепр,  
 пр. Гагарина, 8

*В статье рассматривается применение метода случайного поиска для оптимального проектирования сжатых в осевом направлении гладких цилиндрических идеальных тонкостенных оболочек и оболочек с начальными несовершенствами. При постановке задачи математического программирования в качестве целевой функции рассматривается минимальный вес оболочки. В качестве ограничений, накладываемых на область допустимых решений, принимаются ограничения: по критической нагрузке местной потери устойчивости, по критической нагрузке потери устойчивости оси оболочки; условие прочности и условие по ограничению габаритов оболочки (радиуса и толщины стенки оболочки). При оптимальном проектировании оболочки с начальными несовершенствами постановка задачи математического программирования остается такой же, как и для идеальной оболочки, меняется только ограничение по местной потери устойчивости. Целью настоящей работы является исследование зоны влияния оптимального веса оболочек на величину сжимающей силы и определение диапазона внешних сжимающих нагрузок, при которых определяющими являются ограничения по общей и местной потере устойчивости оболочки. Проведен численный эксперимент. Исследовались зависимости веса, толщины стенки, радиуса срединной поверхности и отношения радиуса срединной поверхности к толщине стенки от величины сжимающей нагрузки для идеальной оболочки и оболочки с начальными несовершенствами. В результате проведенного численного эксперимента установлено, что наличие начальных несовершенств у гладкой цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении, приводит к увеличению ее веса по сравнению с идеальной оболочкой. Увеличение веса происходит не на всем диапазоне сжимающих нагрузок, а только при нагрузках, когда определяющими являются ограничения по местной и общей потере устойчивости. Если оптимальное решение принадлежит ограничению по прочности, что характерно для больших сжимающих нагрузок, влияния начальных несовершенств на оптимальный проект не наблюдается. Вес идеальной оболочки и оболочки с начальными несовершенствами в оптимальном проекте оказывается одинаковым.*

**Ключевые слова:** тонкостенная цилиндрическая оболочка, начальные несовершенства, оптимальное проектирование, случайный поиск.

### Введение

Во многих отраслях машиностроения и в строительстве находят применение тонкостенные конструкции в виде оболочек. Многообразие видов конструкций оболочек, разные условия их нагружения и эксплуатации, сложность анализа напряженного и деформированного состояния привели к созданию специфических приемов и методов расчета, нередко математически достаточно сложных и потому малодоступных широким кругам инженерных работников.

Еще более усложняется расчет оболочек при оптимальном проектировании. С развитием методов математического программирования стало возможным отыскание оптимальных параметров оболочек. Однако далеко не все методы математического программирования успешно справляются с этой задачей. При проектировании конструкций типа оболочек на них обычно накладываются ограничения физического, технологического, эксплуатационного и геометрического характера. Эти ограничения, как правило, записываются в виде неравенств. Таким образом, в пространстве параметров оптимизации выделяется некоторая стационарная область, в пределах которой находится оптимальное решение. Как отмечалось выше, задачи такого типа успешно решаются только современными методами нелинейного программирования, в частности методами случайного поиска с применением ЭВМ [1].

Кроме того, при оптимальном проектировании сжатых подкрепленных цилиндрических оболочек критические напряжения становятся функцией не только параметров обшивки и подкрепления, но и

числа полуволн в окружном и меридиональном направлениях, которые образуются при потере устойчивости. Число полуволн, в свою очередь, также зависит от варьируемых параметров оболочки. Следовательно, область поиска становится нестационарной. Ограничения, которые накладываются на нестационарную область, «дышат». Для решения подобной задачи нужны специальные алгоритмы, учитывающие специфику проблемы. Такие алгоритмы существуют и приведены в специальной литературе [2, 3].

### Оптимизация параметров цилиндрических оболочек без начальных несовершенств

Рассмотрим гладкую изотропную круговую цилиндрическую оболочку заданной длины  $L$ , шарнирно опертую по торцам и нагруженную осевой сжимающей нагрузкой  $N$  (рис. 1). Известны характеристики материала оболочки: модуль упругости  $E$ , предел текучести  $\sigma_T$ , удельный вес  $\gamma$  и коэффициент Пуассона  $\mu$ . Требуется на данном непрерывном множестве значений параметров отыскать такие значения толщины стенки  $\delta$  и радиуса средней поверхности оболочки  $R$ , чтобы при заданной нагрузке  $N$  оболочка имела бы минимальный вес  $G$ .

Математически сформулированная выше задача сводится к поиску минимального значения весовой функции

$$G = 2\pi\gamma LR\delta \quad (1)$$

при выполнении ограничений

$$\frac{2\pi E\delta^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \geq N; \quad (2)$$

$$\frac{\pi^3 E\delta R^3}{L^2} \geq N; \quad (3)$$

$$2\pi R\delta\sigma_T \geq N; \quad (4)$$

$$\delta^{\min} \leq \delta \leq \delta^{\max}; \quad R^{\min} \leq R \leq R^{\max}, \quad (\delta > 0; \quad R > 0). \quad (5)$$

Условие (2) является ограничением по критической нагрузке местной потери устойчивости идеальной круговой цилиндрической оболочки; условие (3) – ограничением по критической нагрузке потери устойчивости оси оболочки; (4) – условие прочности и, наконец, условие (5) ограничивает габариты и толщину стенки оболочки.

Используя обозначения

$$\left. \begin{aligned} A = 2\pi\gamma L; \quad B = \frac{\pi^3 E}{L^2}; \quad C = 2\pi\sigma_T; \\ D = \frac{2\pi E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}; \quad x_1 = \delta; \quad x_2 = R \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и подставляя их в уравнения (1)–(5), получаем следующую задачу нелинейного программирования: найти неотрицательные значения  $x_1$  и  $x_2$ , которые минимизируют функцию

$$\Phi = Ax_1x_2 \quad (7)$$

и удовлетворяют ограничениям

$$\left. \begin{aligned} Dx_1^2 \geq N; \quad Bx_1x_2^3 \geq N; \quad Cx_1x_2 \geq N \\ x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}; \quad x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

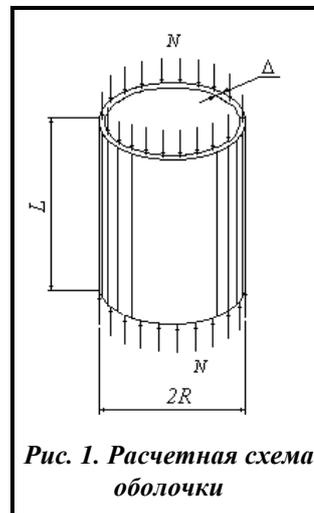


Рис. 1. Расчетная схема оболочки

Исходные данные для решения задачи принимались следующие:  $E=8,16 \cdot 10^4$  МПа;  $\sigma_t=162$  МПа;  $\mu=0,3$ ;  $\gamma=78,55$  кН/м<sup>3</sup>;  $L=3$  м. Нагрузки на оболочку:  $N=1000$  кН и  $N=10$  кН. Геометрические ограничения:  $0,01 \leq \delta \leq 2,0$  см;  $1 \leq R \leq 100$  см.

Решение задачи (7)–(8) выполнялось с помощью алгоритма случайного поиска с покоординатным самообучением с забыванием [1]. Спуск осуществлялся из двух точек с координатами:  $x_1=2$  см,  $x_2=100$  см и  $x_1=1,5$  см,  $x_2=50$  см. При осевой нагрузке на оболочку  $N=1000$  кН значения оптимальных параметров  $\delta$  и  $R$  вышли разными, но величина целевой функции оказалась одинаковой ( $G=1459,4$  Н). Анализ решения задачи показал, что при большой внешней нагрузке при заданной в примере длине оболочки доминирующим для такой оболочки является условие прочности, которое графически на достаточно значительном по длине участке совпадает с линией уровня целевой функции. На рис. 2 на линии уровня весовой функции, которая соответствует значению  $G=1459,4$  Н, выделен интервал возможных оптимальных решений для  $\delta$  и  $R$ , которые доставляют минимум функция цели (7). При решении сформулированной задачи в работе [4], где отыскивались параметры  $\delta$  и  $R$  для оптимальной оболочки, нагруженной продольной нагрузкой  $N=1000$  кН, интервал одинаковых минимальных значений целевой функции был установлен аналитически с помощью метода множителей Лагранжа. Минимальное значение целевой функции составило  $G=1459,4$  Н, что полностью совпадает с решением, полученным методом случайного поиска.

Оболочка, нагруженная продольной сжимающей нагрузкой  $N=10$  кН, имеет единственное оптимальное решение  $G=15,5$  Н, при  $\delta=0,018$  см и  $R=5,72$  см (по данным работы [4]). Результаты поиска приведены в табл. 1. Траектория поиска показана на рис. 3. Из табл. 1 видно, что результаты решения задачи, приведенные в работе [4] и полученные с помощью алгоритма покоординатного самообучения с забыванием, полностью совпадают.

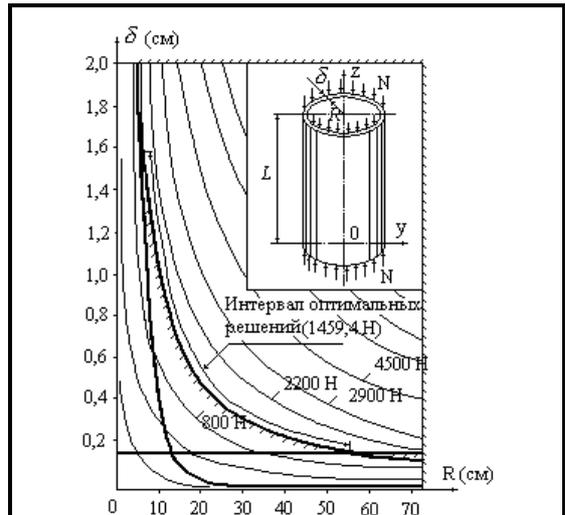


Рис. 2. Иллюстрация к оптимальному проектированию оболочки при большой величине сжимающей нагрузки

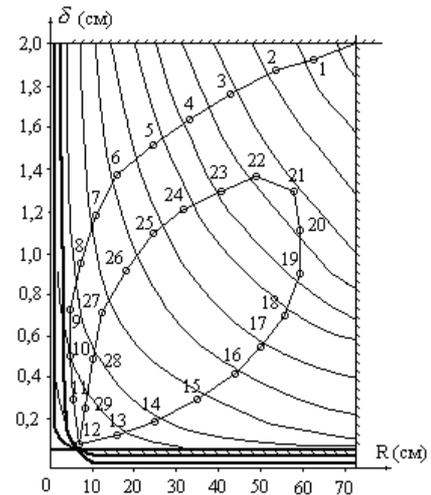


Рис. 3. Траектория поиска оптимального решения для оболочки с малым значением сжимающей нагрузки

Таблица 1. Результаты оптимального проектирования идеальной цилиндрической оболочки

Метод	Оболочка	Вес $G$ , Н	Толщина стенки $\delta$ , см	Радиус $R$ , см
Множителей Лагранжа [4]	Идеальная	15,5	0,018	5,72
Покоординатного самообучения с забыванием	Идеальная	15,5	0,018	5,72

### Влияние начальных несовершенств на оптимальные параметры гладкой цилиндрической оболочки

Современная теория расчета гладких оболочек располагает различными методами оценки минимальных критических нагрузок. В их числе классические подходы [5], построенные на основе использования статического критерия Эйлера при учете однородного и безмоментного докритического состояния оболочки, а также нелинейные подходы, учитывающие неоднородность и моментность докритического состояния [6, 7]. Широкое применение получили также методы расчета тонкостенных оболочек с начальными несовершенствами, использующие как классические подходы [8], так и нелинейные методы [9].

Рассмотрим цилиндрическую гладкую изотропную круговую цилиндрическую оболочку заданной длины  $L$ , шарнирно опертую по торцам и нагруженную осевой сжимающей нагрузкой  $P$ , имеющую начальные несовершенства. Известны характеристики материала оболочки: модуль упругости  $E$ , предел текучести  $\sigma_T$ , удельный вес  $\gamma$  и коэффициент Пуассона  $\mu$ . Требуется отыскать такие значения толщины  $\delta$  и радиуса срединной поверхности оболочки  $R$ , чтобы при заданной нагрузке  $P$  оболочка имела бы минимальный вес  $G$ . Известно, что при наличии несовершенств значения критических усилий осевого сжатия существенно изменяются, причем тем больше, чем больше отношение  $R/\delta$ . В связи с этим значительный интерес представляет следующий вопрос: как влияет при прочих равных условиях на оптимальные (в весовом смысле) значения параметров качество поверхности оболочки? Иначе говоря, необходимо отыскать такие параметры  $\delta$  и  $R$ , которые доставили бы минимум функции веса оболочки, имеющей начальные несовершенства.

Сформулированная задача во многом совпадает с предыдущей. Отличие лишь в выражении для критической нагрузки местной потери устойчивости. С учетом влияния начальных несовершенств это выражение имеет вид [10]

$$\frac{2\pi E\delta^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \left[ \left(1+k\frac{R}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(k\frac{R}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \geq N, \quad (9)$$

где коэффициент  $k$  учитывает качество поверхности оболочки и, как показано в работе [10], при  $k=0,005$  кривая, построенная в координатах  $N^*$  (критическая сила)  $R/\delta$ , является нижней огибающей кривой к многочисленным экспериментам разных авторов.

Вводя обозначение (6), получаем задачу нелинейного программирования: найти неотрицательные значения  $x_1$  и  $x_2$ , которые минимизируют функцию

$$\Phi = Ax_1x_2 \quad (10)$$

при выполнении ограничений

$$\left. \begin{aligned} Dx_1^2 \left[ \left(1+k\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(k\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \geq N; \quad Bx_1x_2^3 \geq N; \quad Cx_1x_2 \geq N; \\ x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}; \quad x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для оценки влияния начальных несовершенств на оптимальный проект и установления зоны весовой эффективности идеальной оболочки по отношению к оболочке с начальными несовершенствами была выполнена весовая оптимизация сжатой в осевом направлении гладкой цилиндрической оболочки без начальных несовершенств (идеальной оболочки). Результаты решения этой задачи приведены в табл. 2.

Поставленная задача (10–11) решалась с помощью алгоритма непрерывного обучения с направляющим конусом [1] при следующих исходных данных:  $N=10$  кН;  $E=8,16 \cdot 10^4$  МПа;  $\sigma_T=162$  МПа;  $\mu=0,3$ ;  $L=3$  м;  $\gamma=78,55$  кН/м<sup>3</sup>;  $k=0,005$ ;  $0,01 \leq \delta \leq 1,5$ ,  $1 \leq R \leq 50$  см.

В качестве стартовой была выбрана точка с координатами  $x_1=1,5$  см;  $x_2=50$  см. Начальная величина шага равнялась  $a=0,4$  с последующим его дроблением. Угол раскрытия конуса принимался  $\psi=0,5$  рад и уменьшался вдвое при отслеживании нового направления вблизи границы области поиска. Результаты решения приведены в табл. 2.

**Таблица 2. Результаты оптимального проектирования идеальной цилиндрической оболочки и оболочки с начальными несовершенствами**

Метод	Оболочка	Вес $G$ , Н	Толщина стенки $\delta$ , см	Радиус $R$ , см
Направляющий конус	Идеальная	15,60	0,0181	5,820
Направляющий конус	С начальными несовершенствами	20,64	0,0276	5,042

Как и ожидалось, вес оптимальной оболочки с начальными несовершенствами оказался больше, чем вес идеальной оболочки.

Влияние начальных несовершенств на оптимальный проект исследовалось в более широком диапазоне изменения сжимающих нагрузок. При решении этой задачи был использован алгоритм случайного поиска с управляемой плотностью распределения проб (ПГЭФ) [11].

Численный эксперимент проводился при величине сжимающей нагрузки  $P$ , меняющейся от 0 до 1000 кН. На рис. 4 приведены графики зависимости веса оптимальной оболочки от величины сжимающей нагрузки в виде своеобразной петли.

На этой петле можно выделить условно три зоны. Первая зона значений веса оболочки лежит ниже сечения  $A$ . При значениях нагрузки  $P \leq 10$  кН ограничения, определяющими оптимальный проект, являются геометрические ограничения на толщину стенки оболочки и ограничение по общей потере устойчивости оси оболочки (3). Влияние начальных несовершенств на величину веса оболочки в этой зоне отсутствует. Вес идеальной оболочки и оболочки с начальными несовершенствами оказывается одинаковым. Вторая зона располагается между сечениями  $A$  и  $B$ . Оптимальные решения для идеальной оболочки и оболочки с начальными несовершенствами, принадлежащие рассматриваемой зоне, характерны тем, что определяющими ограничениями для них являются ограничения по местной и общей потерям устойчивости (9) и (3). Во второй зоне наблюдается влияние начальных несовершенств на увеличение веса оболочки, толщина стенки оболочки оказывается больше, чем у идеальной оболочки (рис. 5), радиус срединной поверхности — меньше (рис. 6).

Отношение радиуса срединной поверхности к толщине стенки  $R/\delta$  у идеальной оболочки оказалось в пределах второй зоны больше, чем у оболочки с начальными несовершенствами (рис. 7).

Наибольшее относительное увеличение веса оболочки с начальными несовершенствами по отношению к весу идеальной оболочки

$$\xi = \frac{G_{\text{нсв}} - G_{\text{и}}}{G_{\text{и}}} \cdot 100\%$$

составило в пределах второй зоны 36,71%. С увеличением величины сжимающей нагрузки относительное увеличение веса снижалось и при  $P=26$  кН оказалось равным нулю.

Третья зона на рис. 4 лежит выше сечения  $B$  и характерна равенством значений целевой функции для идеальной оболочки и оболочки с начальными несовершенствами.

Определяющим ограничением для третьей зоны является ограничение по прочности (4). Влияние начальных несовершенств на оптимальный проект в этой зоне отсутствует.

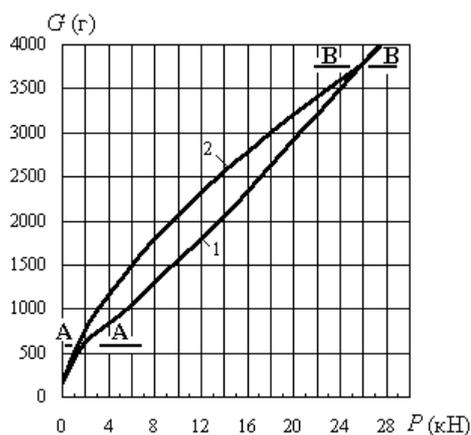


Рис. 4. Зависимость веса идеальной оболочки (1) и оболочки с начальными несовершенствами (2) от величины сжимающей силы  $P$

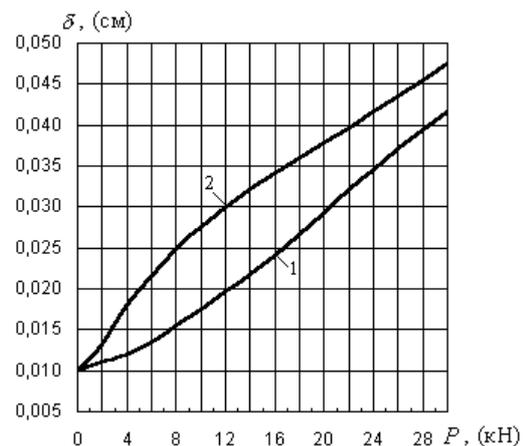
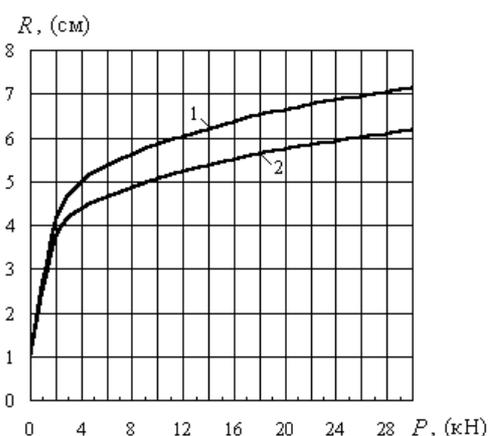
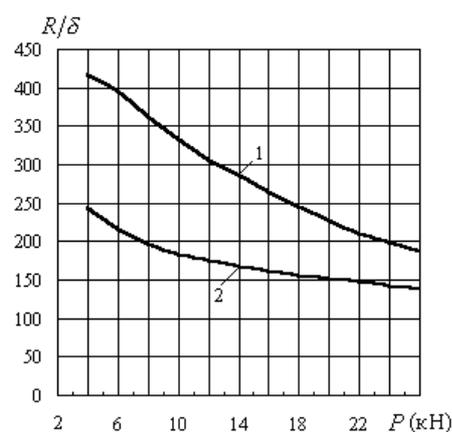


Рис. 5. Зависимость толщины стенки идеальной оболочки (1) и оболочки с начальными несовершенствами (2) от величины сжимающей силы  $P$



**Рис. 6.** Зависимость радиуса срединной поверхности идеальной оболочки (1) и оболочки с начальными несовершенствами (2) от величины сжимающей силы  $P$



**Рис. 7.** Зависимость отношения радиуса срединной поверхности к толщине стенки  $R/\delta$  идеальной оболочки (1) и оболочки с начальными несовершенствами (2) от величины сжимающей силы  $P$

Из других наблюдений можно отметить, что для оболочек с начальными несовершенствами, лежащими во второй зоне, ограничение по общей потере устойчивости включается в работу значительно раньше, чем для идеальных оболочек. Так, если для гладкой оболочки ограничение по местной потере устойчивости включается в работу при  $P=12$  кН, то для оболочек с начальными несовершенствами это ограничение начинает работать с величины сжимающей силы  $P=24$  кН. Для идеальной оболочки оптимальное решение будет лежать на ограничении по прочности при существенно меньших сжимающих нагрузках ( $P=12$  кН). Это означает, что, начиная с  $P=12$  кН, оптимальные параметры для идеальной оболочки можно определять с учетом только условия прочности, что существенно упрощает решение. При оптимальном проектировании оболочек с начальными несовершенствами подобный расчет можно проводить только по достижении сжимающей силой величины  $P=24$  кН.

## Выводы

Проведенный численный эксперимент позволяет сделать следующие выводы:

1. Наличие начальных несовершенств у гладкой цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении, приводит к увеличению ее веса по сравнению с идеальной оболочкой при оптимальном проектировании.

2. Увеличение веса оболочки происходит не на всем диапазоне сжимающих нагрузок, а только при тех нагрузках, когда определяющими ограничениями являются ограничения по местной и общей потере устойчивости. Если оптимальное решение принадлежит ограничению по прочности, что характерно для больших сжимающих нагрузок, влияние начальных несовершенств на оптимальный проект не наблюдается, вес идеальной оболочки и оболочки с начальными несовершенствами в оптимальном проекте оказывается одинаковым.

## Литература

1. Растрин Д. А. Статистические методы поиска: монография. М.: Наука, 1968. 376 с.
2. Волинский Э. И., Почтман Ю. М. Об одном алгоритме случайного поиска для решения многоэкстремальных задач. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. 1974. № 1. С. 55–60.
3. Филатов Г. В. Два способа адаптации алгоритма случайного поиска при оптимальном проектировании цилиндрических оболочек. *Стр-во, материаловедение, машиностроение: сб. науч. тр. Сер. Стародубовские чтения 2003*. Днепропетровск. Приднпр. акад. стр-ва и архитектуры. 2003. Вып. 22. Ч. 3. С. 312–315.
4. Гинзбург И. Н., Кан С. Н. Об одном методе выбора оптимальных параметров тонкостенной конструкции. *Тр. VII всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок*. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 271–273.
5. Александров А. Я., Наумова М. П. Оптимальные параметры трехслойных пластин и пологих оболочек с наполнителем из неармированного и армированного пенопласта при сжатии. *Расчеты элементов авиационных конструкций*. М.: Машиностроение, 1965. Вып.3. С. 91–99.

6. Алумяз Н. А. О представлении основных соотношений нелинейной теории оболочек. *Прикл. математика и механика*. 1956. Т. 20. № 1. С. 136–139.
7. Муштгари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 421 с.
8. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
9. Гавриленко Г. Д. Устойчивость ребристых оболочек несовершенной формы. Киев: Ин-т механики НАН Украины, 1999. 190 с.
10. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 507 с.
11. Filatov G. V. The global method of random search with controlled boundaries of the interval parameters to be optimized. *Intern. J. Emerging Techn. & Advanced Eng.* 2016. Vol. 6. Iss. 9. P. 231–247.

Поступила в редакцию 25.11.2019

## Оптимальне проектування гладких оболонок без урахування та з урахуванням початкових недосконалостей

Г. В. Філатов

Український державний хіміко-технологічний університет,  
49005, Україна, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 8

У статті розглядається застосування методу випадкового пошуку до оптимального проектування стиснутих в осьовому напрямку гладких циліндричних ідеальних тонкостінних оболонок і оболонок з початковими недосконалостями. При постановці задачі математичного програмування як цільова функція розглядається мінімальна вага оболонок. Як обмеження, що накладаються на зону допустимих розв'язків, приймаються обмеження: з критичного навантаження місцевої втрати стійкості, з критичного навантаження втрати стійкості осі оболонки; умова міцності і умова щодо обмеження габаритів оболонки (радіуса і товщини стінки оболонки). При оптимальному проектуванні оболонки з початковими недосконалостями постановка задачі математичного програмування залишається такою ж, як і для ідеальної оболонки, змінюється тільки обмеження з місцевої втрати стійкості. Метою цієї роботи є дослідження зони впливу оптимальної ваги оболонок на величину стискальної сили і визначення діапазону зовнішніх стискальних навантажень, за яких визначальними є обмеження з загальної та місцевої втрати стійкості оболонки. Проведено числовий експеримент. Досліджувалися залежності ваги, товщини стінки, радіуса серединної поверхні і відношення радіуса серединної поверхні до товщини стінки від величини стискального навантаження для ідеальної оболонки і оболонки з початковими недосконалостями. В результаті проведеного числового експерименту встановлено, що наявність початкових недосконалостей у гладкої циліндричної оболонки, стиснутої в осьовому напрямку, призводить до збільшення її ваги у порівнянні з ідеальною оболонкою. Збільшення ваги відбувається не на всьому діапазоні стискальних навантажень, а тільки при навантаженнях, коли визначальними є обмеження з місцевої та загальної втрати стійкості. Якщо оптимальний розв'язок належить обмеженню з міцності, що характерно для великих стискальних навантажень, впливу початкових недосконалостей на оптимальний проект не спостерігається. Вага ідеальної оболонки і оболонки з початковими недосконалостями в оптимальному проекті виявляється однаковою.

**Ключові слова:** тонкостінна циліндрична оболонка, початкові недосконалості, оптимальне проектування, випадковий пошук.