

УДК 519: 517.97

АДАПТИВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН КРИВЫХ, ЗАДАВАЕМЫХ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Г. А. Шелудько

С. В. Угримов, д-р техн. наук

sugrimov@ipmach.kharkov.ua

ORCID: 0000-0002-0846-4067

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков,
ул. Пожарского, 2/10

Измерение длин кривых достаточно распространено при решении различных задач. Если функция, задающая кривую, дифференцируема, то вычисление длины является относительно простой математической операцией. При отсутствии начальной информации о функции приходится применять приближенные методы. Какой из этих методов целесообразно использовать для конкретной функции, обычно решает сам пользователь. Одним из важных факторов, влияющих на выбор метода, является имеющийся ресурс времени на предварительный анализ функции и согласование с начальными данными, которые включают необходимую точность результата и общие численные затраты. В статье предлагается метод, основанный на апостериорном подходе к проблеме, когда анализ характера поведения функции осуществляется в самом процессе приближенного измерения длины кривой в заданной области. Такой способ стал возможным благодаря введению пошагового адаптивного механизма, реагирующего на отклонение кривой функции от аппроксимирующей ее ломаной. В конечном итоге принятый локальный анализ вследствие адаптации позволил проходить участки с большой крутизной кривой с малым шагом, а пологие – с большим. При особенно резком изменении функции (например, в подобластях с особенностями) основной адаптивный механизм наделен возможностью выхода за границы принятого набора констант без серьезных усложнений алгоритма. Таким образом, отпала необходимость в предварительном анализе характера поведения функции, не обязательно регулярной, и выявлении особенностей (изломы, экстремальные точки и т.п.), их числа и места. Для вычисления длины кривой достаточно задать функцию на данной области и необходимую точность, ограниченную минимальным шагом, не заботясь об использовании каких-то вспомогательных таблиц и весовых коэффициентов. Проведенный численный эксперимент на тестовом наборе функций разной сложности показал преимущество предлагаемого подхода над сеточными методами, особенно с равноотстоящими узлами.

Ключевые слова: недифференцируемая функция, кусочно-линейное приближение, адаптивный пошаговый выбор узлов, индекс эффективности.

Введение

Измерение длин кривых является весьма распространённой операцией, возникающей, например, в теории оптимального управления, изопериметрическом анализе, геодезических построениях и ряде смежных направлений. Это относительно простая операция, когда задающая кривую функция дифференцируема. В случае недостатка информации о функции или её дифференцируемости возникает необходимость в использовании приближенных численных методов.

При вычислении длины L отрезка линии (рис. 1), заданной функцией $f(x)$ на $[A, B]$, всегда важно выбрать наиболее простой и экономный метод поиска.

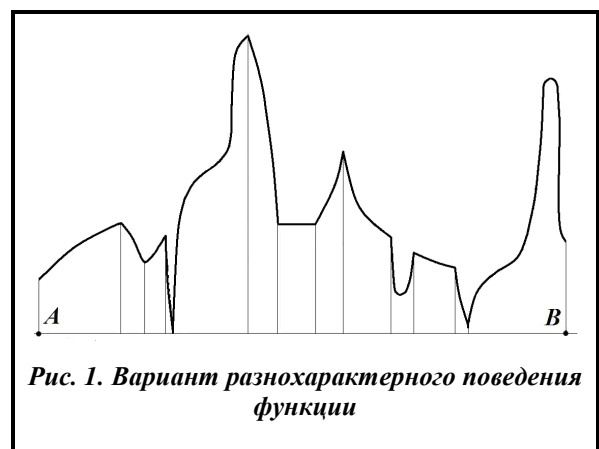


Рис. 1. Вариант разнохарактерного поведения функции

© Г. А. Шелудько, С. В. Угримов, 2020

Другая возможность контроля за «максимальным» отклонением хорды \overline{ab} от дуги \widehat{ab} кривой $f(x)$ (рис. 2) основана на наиболее вероятном расположении его в «срединной» окрестности дуги \widehat{ab} , т.е. когда ситуацию σ_k можно приближённо характеризовать, например, величиной отклонения

$$\sigma_k = 0,5 \left| y_k^* - g_k^* \right| \quad (4)$$

В отличие от способа аппроксимации в [13], здесь учтено приближённое направление $\overline{ae} \parallel \overline{jb}$ «производной» $f'(x)$ в точке (x_k, y_k) , что позволяет точнее приблизить точку d (рис. 2) к дуге \widehat{ab} , используя информативные точки $(x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$

$$y_k^* = y_k + \lambda_k (y_{k+1} - y_{k-1}), \quad \lambda_k = 0,5 \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}}, \quad g_k^* = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \quad x_k^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Здесь и далее под информативными понимаются точки, в которых известны значения функции.

Зависимость (4) даёт возможность, не вычисляя функцию $f(x)$ в точке x_k^* , аппроксимировать дугу кривой f ломаной g , составленной из двух звеньев \overline{ad} и \overline{db} , общей длиной которых является

$$l_k = 0,5 \left(\sqrt{(y_k^* + g_k^* - 2y_k)^2 + h_k^2} + \sqrt{(y_k^* + g_k^* - 2y_{k+1})^2 + h_k^2} \right). \quad (5)$$

Для вычисления приближённой длины L (1) остановимся на адаптивном подходе (2) снятия информации с помощью σ_k (4), дающем возможность по формуле

$$h_{k+1} = h_k \exp[\alpha(\epsilon - \sigma_k)] \quad (6)$$

получать длины шагов, а по ним – и длины звеньев l_k (5) через величины y_k^* и g_k^* , характеризующие близость ломаной g к кривой f . Входящий в (6) коэффициент интенсивности α отвечает за степень нарастания или убывания изменения шага h_{k+1} , а ϵ – за допустимый уровень отклонения y_k^* от g_k^* .

Если резко меняется поведение функции $f(x)$ на текущем наборе x_k, x_{k+1} , то не только величина дискриминанта

$$D = \epsilon - \sigma_k \quad (7)$$

оказывается отрицательной, но и угол $\angle a$ поворота звена ломаной может стать больше прямого ($\pi/2$). И тогда следующий шаг, определяемый по формуле (6), может оказаться слишком малым, приводящим к замедлению процесса поиска. В зависимости от характера поведения встретившейся особенности такое чрезмерное отклонение от стандартного продвижения вдоль кривой в большей или меньшей степени негативно скажется на объеме вычислительных затрат. Из-за этого, а также чтобы исключить возможную неустойчивость шагового процесса, можно ввести минимальный шаг h_{\min} , т.е. условиться, чтобы $h_k \geq h_{\min}$ для всех номеров k .

В случае относительно пологих кривых шаговый процесс, определяемый формулой (6), осциллирует, а в местах больших отклонений функции $f(x)$ от $g(x)$ алгоритмически переходит в режим «минимального шага».

При «резком изменении направления функции» по значению D (7) возможна потеря точности в вычислении длины кривой на текущем участке (адаптивная корректировка шага произойдёт только на следующем участке). Поэтому в способе (4)–(6) можно ввести максимальный допуск $M > 1$ на отклонение от ϵ , т.е. выполнить условие $\sigma_k \leq M \cdot \epsilon$. При его нарушении приходится, в рамках шагового процесса, задаваемого формулами (4)–(6), вводить дополнительную информативную точку $x_k^* = x_k + h_k / 2M$. Это несколько снижает эффективность метода, но зато способствует сохранению отклонения g от f , близкому к ϵ . После корректировки и прохода особенности процесс автоматически переходит на прежний режим. Когда текущий шаг h_{k+1} перекроет конец области $[A, B]$, то естественно взять $x_{k+1} = B$ и завершить вычисление L (1).

При адаптации [4, 13–22] более точное представление о задаче получаем в самом ходе её решения, поэтому снижается чувствительность к начальным данным. Однако неудачный выбор исходного ша-

га h_0 может иногда косвенно сказаться на погрешности решения. Так, слишком малый шаг позволяет повысить точность, но до определённого предела, однако при этом увеличиваются численные затраты, а грубый шаг хотя и снижает их, но для достижения нужной точности может опять-таки увеличиться время решения и существует реальная опасность пропуска особенностей, как раз в начале. Учитывая такую неопределённость, приходится ограничивать шаг сверху и снизу, т.е. принимать условие $h_{\min} \leq h_k \leq h_{\max}$. Но адаптация (6) частично разрешает вопрос о рациональном выборе начального шага h_0 и позволяет функционировать методу даже без задания начала, полагаясь только на h_{\min} при отсутствии иной информации.

Численный эксперимент

Сделать правильные выводы о возможностях того или иного метода можно лишь после проведения соответствующих проверок на представительном наборе тестовых задач широкого класса и сравнении результатов с результатами решения другими методами. Желательно, чтобы сравнение происходило в равных условиях с методами, синтезированными на одной и той же основе (в данном случае кусочно-линейной).

Безусловно, при этом важную роль играют выбранные для проведения эксперимента задачи. По возможности они должны отражать достаточно широкий класс функций с различным спектром особенностей (изломы, стационарные точки и др.), а также опираться на известные примеры [5–7, 13, 10–19, 21, 22] или сконструированные, объединяющие разнохарактерные функции.

Одним из подобных примеров сконструированных функций может служить зависимость

$$f(x) = \sum_{i=1}^8 \chi(x - x_{i-1}) \cdot \chi(x_i - x) \cdot f_i, \quad \chi(x) = (1 + \operatorname{sgn} x)/2,$$

составленная из набора функций $f_1 = 1$, $f_2 = \ln x + 1,693147181$,

$$f_3 = \frac{0,955119613}{x - 1,0448803876}, \quad f_4 = 1,791759469x - 2,583518938,$$

$$f_5 = 3,88089368 - 0,054221831 \cdot e^x, \quad f_6 = -1,$$

$$f_7 = x(1,0(6) - 0,07(3)x\sqrt{6-x}), \quad f_8 = x^2 - 14,8(3)x + 53,(9),$$

определённых на своих сегментах, концами которых являются точки сопряжения $x_0=0$, $x_1=0,5$, $x_2=1,5$, $x_3=2$, $x_4=3$, $x_5=3,8$, $x_6=5$, $x_7=6$, $x_8=7,5$, в которых расположены особенности (изломы, стационарные точки). Поведение функции $f(x)$ иллюстрируется рис. 3.

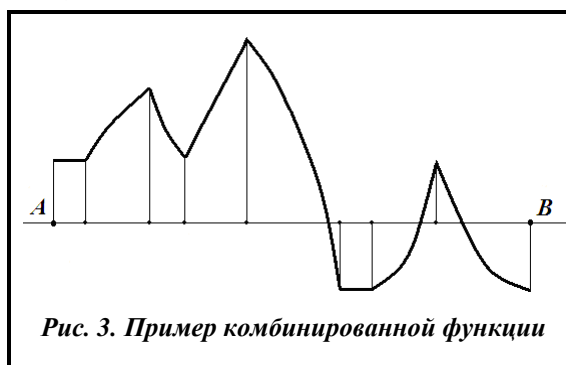


Рис. 3. Пример комбинированной функции

В таблице приведены тестовые функции и результаты вычисления длин их кривых адаптивным методом с экспоненциальным управлением (*AdEx*) и его частным случаем методом сканирования (*Scan*), когда отсутствует управление, т.е. $D = 0$. При этом для удобства анализа результатов количество информативных точек в методе *Scan* выбирается равным количеству, полученному в методе *AdEx*. Выбор для сравнения метода *Scan*, а не более точных методов Симпсона или Гаусса [6, 7, 12] объясняется тем, что метод *Scan* может давать большую точность для функций с разрывными производными (см. рис. 1, 3).

При оценке качества методов существенными признаками обычно выступают трудоёмкость (или время решения) задачи и объём используемой при этом памяти. Поэтому в нашем случае ограничимся условным критерием (индексом эффективности) [23] в виде

$$E = (B - A)[N(|L - L^*| + \epsilon)]^{-1}, \quad (8)$$

где мера близости $|L - L^*| \leq \epsilon$ на $[A, B]$, L – приближённое решение (1), а L^* – точное решение, N – количество вычислений функции $f(x)$ для достижения наперёд заданной точности ϵ . Длина сегмента $[A, B]$ в (8) служит выравнивающим коэффициентом на множестве примеров для тестируемого метода.

В приведённой таблице функции $f(x)$ и соответствующие им приближения длин L кривых располагаются в порядке нарастания сложности, связанной с наличием особенностей и их характера. Присутствие особенностей в функциях, как и ожидалось, несколько снижает эффективность E решения. Но она оказывается всё же выше, чем в методе *Scan*, в основе которого лежит та же кусочно-линейная аппроксимация функции $f(x)$.

Результаты расчета тестовых примеров

k	Функция	$[A, B]$	Метод	L	L^*	N	E
1	$(1-x^2)^{0.5}$	[-1; 1]	Scan	3,1412363916	3,141592653	177	8,331309
			AdEx	3,1418021985			9,341893
2	$(1-2,582843592 x^2)^{0.5}$ [6]	[0;0,6(2)]	Scan	1,2912102895	1,291290325	85	6,777798
			AdEx	1,2912924346			7,304855
3	$(x^2)^{1/3}-x$	[-1; 2]	Scan	4,3674524180	4,408189781	255	0,281874
			AdEx	4,3891797505			0,587940
4	$e^{-x} \sin 2\pi x$	[0; 2]	Scan	4,1958229760	4,225902445	256	0,251372
			AdEx	4,2108289000			0,486047
5	$[1+(5x)^2]^{-1}$ [10]	[-1; 4]	Scan	6,0829017202	6,084423096	259	19,192283
			AdEx	6,0844301696			19,442536
6	$\sin 6x + \sin(7x + \pi)$	[0;0,75\pi]	Scan	11,225587396	11,227596321	215	3,642173
			AdEx	11,228236881			6,680063
7	$\arctg [(x-3)/(x^3+4)]$	[0; $\pi/2$]	Scan	5,0776795649	5,077680629	246	1,249688
			AdEx	5,0776823975			2,497811
8	$13(x-x^2)e^{-3x/2}$ [12]	[0; 4]	Scan	7,6622848307	7,662778876	239	33,814669
			AdEx	7,6630346397			65,694004
9	$ x^4 - 5x^2 + 4 $	[0; 2,5]	Scan	20,599563941	20,694115566	247	0,094415
			AdEx	20,697280762			2,187902
10	$ \sin x + \ln x $	[0,1; 7]	Scan	9,4427715872	9,459615975	340	1,137283
			AdEx	9,4432600208			1,169288
11	$ \pi^{-0.5} e^{(x-1)^2} - 1,5 + 1,5$ [12]	[0; π]	Scan	56,859218061	56,886306843	340	0,348427
			AdEx	56,880234218			1,383769
12	$ \sin x + \sin [(6e)^{1/4} x] $	[0; 6]	Scan	10,267133014	10,285142751	356	0,886594
			AdEx	10,272987199			1,281126
13	$[(x-0,3)^2+0,1^2]^{-1} + [(x-0,9)^2+0,2^2]^{-1} - 6$ [3]	[0; 1]	Scan	192,79878747	192,80597609	518	0,235758
			AdEx	192,80520698			1,091234
14	$ \sin (x^3/20) $	[0; 3π]	Scan	30,635488704	30,659352046	557	0,680544
			AdEx	30,656310079			4,186238
15	$ x(x-4) - 2 $	[0; 6]	Scan	21,359827202	21,465187096	436	0,129386
			AdEx	21,431382222			0,395389
16	$f_1 \chi(2-x) + \chi(x-2)[f_2 \chi(5-x) + f_3 \chi(x-5)],$ $f_1 = (x-1)^4 - 1 , f_2 = (x-3)^4 - 1 ,$ $f_3 = (x-5)^4 + 15$	[-0,5;7]	Scan	42,180853268	42,191169149	557	1,856540
			AdEx	42,196942922			2,292393
17	$\sum_{i=1}^8 \chi(x-x_{i-1}) \cdot \chi(x_i-x) \cdot f_i$	[0; 7,5]	Scan	24,407974191	25,259851480	913	0,009632
			AdEx	25,361745241			0,079836
18	$10(15+2\sin x+10\cos x+3\cos 3x+$ $+3\sin 4x+\cos 5x)$ [7]	[- π ; π]	Scan	689,81426576	689,822898510	1340	0,486768
			AdEx	689,82234612			3,020448

Для всех примеров расчет проводился в одинаковых условиях: $\epsilon=10^{-3}$, $h_{\min}=10^{-3}$, $h_0=5 \cdot 10^{-3}$, $\alpha=10$, $M=2$.

Сравнение результатов длин кривых, полученных методами *Scan* и *AdEx* на контрольных примерах, свидетельствует, что критерий эффективности E у метода *AdEx* оказывается выше во всех тестовых примерах.

Выводы

Предложен адаптивный метод численного нахождения длины кривой. Эффективный пошаговый способ стал возможным благодаря отказу от равноотстоящих узлов x_k , в общем неблагоприятных для подсчета интегральной суммы сразу на всей области $[A, B]$ в целом.

Адаптивный локальный съём информации относительно характера произвольной не обязательно регулярной функции, описывающей форму кривой, позволил заметно снизить вычислитель-

ные затраты, удерживая равномерную допустимую ошибку ϵ отклонения на значительно протяжённых областях $[A, B]$. Отпала необходимость в какой-либо предварительной подготовке или преобразовании функции для непосредственного способа деления кривой на участки, содержащие особенности. При этом вычислительные затраты доведены почти до оптимальных значений. Не нужны априорные сведения о месте и числе возможных особенностей, а также их характере (изломы, стационарные точки и др.). Не требуется специального анализа по установлению величины исходного шага.

Для реализации предлагаемого метода достаточно задать функцию $f(x)$, определённую на $[A, B]$, требуемую точность ϵ и минимально допустимый шаг без каких-либо промежуточных действий или использования таблиц узлов и весовых коэффициентов, а тем более спецфункций, привязанных к сложившейся традиции интегрирования. Метод обходится минимальными временными потерями и объемом оперативной памяти, что особенно важно при решении задач, требующих жесткого ограничения времени. При этом метод позволяет исследовать характер функции и определять участки с резким изменением значений функций на $[A, B]$.

Естественно, метод в равной мере проявляет свою работоспособность и эффективность не только для функций специального вида, но и в случае обычных непрерывных функций широкого профиля. Разработанный подход носит универсальный характер и представляется перспективным для использования в различных сферах. Идея метода легко распространяется на многие случаи управления шаговыми процедурами.

Использование метода *AdEx* может быть полезным для многих практических целей (транспортные задачи: создание оптимальных сетей (дороги, трубопроводы, водные пути и др.), маршрутизация и трассировка, раскрой материалов и другие технико-экономические проекты).

Литература

1. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
2. Демьянов В. Ф., Виноградова Т. К., Никулина В. Н. Недифференцируемая оптимизация. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 324 с.
3. Гупал А. М. Минимизация недифференцируемых функций. *Автоматика и телемеханика*. 1974. № 4. С. 61–64.
4. Шелудько Г. А., Угримов С. В. Адаптивная гибридизация. Х.: Миськдрук, 2011. 308 с.
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моултер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
6. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. М.: Гостехиздат, 1954. 98 с.
7. Мелентьев П. В. Приближенные вычисления. М.: Физматгиз, 1962. 388 с.
8. Чебышев П. Л. О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменных: в 5 т. Т. 3: Математический анализ. 1948. 412 с.
9. Бахвалов Н. С. Об алгоритмах выбора шага интегрирования. *Вычисл. методы и программирование*. 1966. Вып. 5. С. 33–38.
10. Runge C. Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten en ordinaten . *Zeitschriftfür Mathematik und Physik*. 1901. Vol. 46. P. 224–243.
11. Гинзбург Б. Л. Формулы численных квадратур, наиболее выгодные для применения. *Усп. мат. наук*. 1954. Т. 9. Вып. 2 (60). С. 137–142.
12. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018. 636 с.
13. Sheludko G. A., Ugrimov S. V. Modernization adaptive piecewise linear approximation of difficult-to-compute functions. *J. Mech. Eng.* 2018. Vol. 21. No. 2. P. 60–67.
14. Пукк Р. А. Алгоритм интегрирования, учитывающий степень гладкости функций. *Изв. АН ЭССР. Физика. Математика*. 1970. Т. 19, № 3. С. 368–370.
15. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М: Мир, 1964. 360 с.
16. Gander W., Gautschi W. Adaptive quadrature – revisited. *BIT Numerical Math.* 2000. Vol. 40. Iss. 1. P. 84–101. <https://doi.org/10.1023/A:1022318402393>.
17. Шелудько Г. А. Адаптивное интегрирование. АН Украины. Ин-т проблем машиностроения. Харьков. 1973. 12 с. Деп. ВИНТИ 26.07.73. № 7753.
18. Шелудько Г. А., Угримов С. В. Адаптивные решения некоторых задач вычислительной математики. Харьков: Ин-т проблем машиностроения АН Украины, 1997. 37 с.
19. McKeeman W. M. Algorithm 145: adaptive integration bi Simpson's rule. *Communication of the Association for Computing Machinery*. 1962. Vol. 5. Iss. 12. P. 604. <https://doi.org/10.1145/355580.369102>.

20. Рабинович Е. В., Рубан А. А., Цапенко М. П., Шефель Г. С. Адаптивная кусочно-линейная аппроксимация. *Автометрия*. 1993. № 1. С. 26–29.
21. Shekel J. Test functions for multi-modal search techniques. Proc. 5th Annu. Princeton Conf. Inform. Sci. and Syst. 1971. P. 354–359.
22. Шелудько Г. А., Шупіков О. М., Сметанкіна Н. В., Угрімов С. В. Прикладний адаптивний пошук. Х.: Око, 2001. 191 с.
23. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 219 с.

Поступила в редакцию 07.02.2020

Адаптивне обчислення довжин кривих, які задаються недиференційовними функціями

Г. А. Шелудько, С. В. Угрімов

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

Вимірювання довжин кривих є достатньо поширеним під час розв'язання різних задач. Якщо функція, що задає криву, є диференційовною, то обчислення довжини є досить простою математичною операцією. За відсутності початкової інформації про функцію доводиться застосовувати наближені методи. Який з цих методів за наявності конкретної функції доцільно використати, звичайно вирішує користувач, враховуючи клас функції та існуючий в його розпорядженні арсенал можливостей. Одним із важливих факторів, що впливають на вибір методу, є наявний ресурс часу на попередній аналіз функції та узгодження з початковими даними, які включають необхідну точність результату і загальні числові витрати. У статті пропонується метод, що ґрунтується на апостеріорному підході до проблеми, коли аналіз характеру поведінки функції здійснюється саме в процесі наближеного вимірювання довжини кривої в заданій області. Такий спосіб став можливим завдяки введенню покрокового адаптивного механізму, що реагує на відхилення кривої функції від її апроксимуючої ламаної. В кінцевому підсумку прийнятий локальний аналіз внаслідок адаптації дозволив проходити ділянки з великою крутістю кривої з малим кроком, а пологі – з великим. За особливо різкої зміни функції (наприклад, в підобластях з особливостями) основний адаптивний механізм наділений можливістю виходу за межі прийнятого набору констант без серйозних ускладнень алгоритму. Таким чином, відпала необхідність в попередньому дослідженні характеру поведінки функції, не обов'язково регулярній, та виявленні особливостей (злами, екстремальні точки і т.п.), їх числа і місця. Для обчислення довжини кривої достатньо задати функцію на даній області і необхідну точність, обмежену мінімальним кроком, не піклуючись про використання якихось допоміжних таблиць та вагових коефіцієнтів. Проведений чисельний експеримент на тестовому наборі функцій різної складності показав перевагу запропонованого підходу над сітковими методами, особливо з рівновіддаленими вузлами.

Ключові слова: недиференційовна функція, кусково-лінійне наближення, адаптивний покроковий вибір вузлів, індекс ефективності.