УДК 536.24

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ю. М. Мацевитый,
академик НАН Украины
matsevit@ipmach.kharkov.ua
ORCID: 0000-0002-6127-0341

В. В. Ганчин
gan4ingw@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9242-6460

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков, ул. Пожарского, 2/10

Разработаны подходы к идентификации теплофизических характеристик с использованием методов решения обратных задач теплопроводности и метода регуляризации А. Н. Тихонова. По результатам проведенного эксперимента определяются зависящие от температуры коэффициент теплопроводности, теплоемкость, внутренние источники теплоты. При этом теплофизические характеристики аппроксимируются кубическими сплайнами Шёнберга, в результате чего их идентификация сводится к определению неизвестных коэффициентов в аппроксимированных зависимостях. Следовательно, температура в теле будет зависеть от этих коэффициентов и ее можно будет представить, используя два члена ряда Тейлора как линейную комбинацию ее частных производных по неизвестным коэффициентам, умноженных на приращения этих коэффициентов. Подставляя это выражение в функционал Тихонова и используя свойство минимума квадратичного функционала, можно свести решение задачи к решению системы линейных уравнений относительно приращений неизвестных коэффициентов. Выбрав некоторый параметр регуляризации и некоторые функции в качестве начального приближения, можно реализовать итерационный процесс, в котором вектор неизвестных коэффициентов для текущей итерации будет равен сумме вектора коэффициентов, полученных на предыдущей итерации, и вектора приращений коэффициентов в результате решения системы линейных уравнений. Такой итерационный процесс по идентификации теплофизических характеристик для каждого параметра регуляризации дает возможность определить среднеквадратическую невязку между получаемой температурой и температурой, измеренной в результате проведенного эксперимента. Остается подобрать параметр регуляризации таким образом, чтобы эта невязка была в пределах среднеквадратичной ошибки измерений. Такой поиск, например, идентичен алгоритмам поиска корня нелинейного уравнения. При проверке эффективности использования предложенного метода был решен ряд тестовых задач для тел с известными теплофизическими характеристиками. Проведен анализ влияния случайных погрешностей измерений на погрешность идентифицируемых теплофизических характеристик исследуемого тела.

Ключевые слова*: обратная задача теплопроводности, метод регуляризации А. Н. Тихонова, стабилизирующий функционал, параметр регуляризации, идентификация, аппроксимация, кубические сплайны Шёнберга.*

Введение

Решение обратных задач теплопроводности (ОЗТ) по идентификации параметров математических моделей имеет особое значение как важный этап обеспечения адекватности этих моделей при наличии экспериментальной информации об исследуемом тепловом процессе. В данной статье рассматривается нелинейная внутренняя ОЗТ по идентификации теплофизических характеристик. Это могут быть зависимые от температуры коэффициент теплопроводности, теплоемкость, внутренние источники теплоты и т.п. В работах [1–6] приведены классификации ОЗТ и рассмотрены методы их решения. В работах [4, 5] задачи по идентификации коэффициента теплопроводности и теплоемкости называют коэффициентной ОЗТ. Мы следуем классификации, приведенной в работах [2, 6], и все задачи по идентификации теплофизических характеристик внутри исследуемого тела относим к классу внутренних задач по аналогии с внешними ОЗТ [2, 4, 5, 6] по идентификации тепловых потоков и других теплофизических характеристик на поверхности объекта. Решение для класса внутренних ОЗТ по одновременному определению внутренних теплофизических характеристик, таких, как коэффициент теплопроводности и теплоемкость, считается наиболее трудоемким, так как очень сложно, а в некоторых случаях практически невозможно одновременно учесть влияние этих характеристик на тепловой процесс исследуемого объекта. Одной из первых работ, посвященных решению таких задач, была работа [7], в которой рассматривалась одновременная идентификация коэффициента теплопроводности и удельной объемной теплоемкости искусственных алмазов путем решения многопараметрической ОЗТ с использованием итерационного фильтра. В выводах этой работы утверждается, что при одновременном поиске различных теплофизических характеристик неточность в определении одной из них вызывает соответствующую неточность в идентификации другой, т.е. для их правильной одновременной идентификации должна быть известна априорная информация о какой-то из идентифицируемых характеристик. В работе [8] предлагается метод идентификации одной из теплофизических характеристик, который сводится к построению итерационного процесса по определению вектора коэффициентов в аппроксимационной зависимости идентифицируемой функции от температуры. В этой работе используется метод α-регуляризации М. М. Лаврентьева [9, 10], который является менее гибким по сравнению с методом регуляризации А. Н. Тихонова [5], так как при его использовании сложнее учесть априорную информацию об искомой теплофизической характеристике. Мы, используя итерационный процесс, предложенный в работе [8], и метод регуляризации А. Н. Тихонова [5], предлагаем следующий подход к одновременной идентификации нескольких искомых характеристик.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается нестационарная внутренняя ОЗТ, которая может быть формализована следующим образом:

$$A[\varphi_1(T),\dots,\varphi_i(T),\dots,\varphi_n(T)]=T^{ex},\ i=\overline{1,n}\ ,$$

где $\varphi_i(T), i=\overline{1,n}$ – искомые теплофизические характеристики, зависящие от температуры; T^{ex} – переменная состояния процесса, которая в большинстве случаев известна из эксперимента (исходные данные); A – оператор, связывающий искомые зависимости $\varphi_i(T), i=\overline{1,n}$ с исходными данными T^{ex}; n – количество искомых зависимостей.

Эта задача, как и любая обратная задача теплопроводности, ввиду нарушения причинно-следственной связи является некорректной по Адамару, что приводит к неустойчивости получаемого решения. Для решения таких задач их либо сводят к условно-корректным, либо оставляют некорректными, но применяют один из методов регуляризации [1–10]. Здесь используется метод регуляризации А. Н. Тихонова [5].

Рассмотрим нестационарный тепловой процесс в теле с граничными условиями 2-го и 3-го рода, описываемый следующим образом [2, 11]:

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial\tau}=div(\lambda(T)\cdot grad(T))+S(T),\ M\in D, \tag{1}$$

$$-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\nu}\bigg|_{M\in\Gamma_1}=q\ , \tag{2}$$

$$-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\nu}\bigg|_{M\in\Gamma_2}=\alpha(T-T_S)\ , \tag{3}$$

$$T(M,\tau)\big|_{\tau=0}=T_0, \tag{4}$$

$$\text{при } T(M_k,\tau_i)=T_{ik}^{ex},\quad i=\overline{1,n_\tau},\quad k=\overline{1,m}, \tag{5}$$

где T=$T(M, \tau)$ – температура тела; D – область пространства, занимаемая телом; Γ_1 и Γ_2 – части границы области D; M – точка в области D; τ – временная координата; $\lambda(T), C(T), S(T)$ – искомые зависимости коэффициента теплопроводности, теплоемкости и внутреннего источника теплоты; α – коэффициент теплоотдачи поверхности Γ_2; T_S – заданная температура внешней среды на поверхности Γ_2; q – заданные тепловые потоки на границе Γ_1; ν – внешняя нормаль к границе тела; T_0 – начальная температура тела; n_τ – количество измерений по временной координате; m – количество точек измерений в теле; M_k – отдельные точки области D, в которых измерена температура T_{ik}^{ex}. Ошибка измерений является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

По данным теплофизического эксперимента T_{ik}^{ex} определяются зависимости теплофизических характеристик исследуемого тела $\lambda(T), C(T), S(T)$ во всем интервале температур с учетом имеющейся априорной информации об этих зависимостях.

Ниже рассматривается методологический подход к решению поставленной задачи.

Регуляризирующий алгоритм решения внутренней ОЗТ

Для решения внутренней обратной задачи теплопроводности используем метод регуляризации А. Н. Тихонова, который сводится к минимизации следующего функционала:

$$J = \int_{0}^{\tau_0}\int_{D}\left[T(M,\tau) - T^{ex}(M,\tau)\right]^2 dDd\tau + \beta\cdot\Omega\left[\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)\right] + \beta\cdot\Delta\left[\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)\right], \tag{6}$$

где $T(M,\tau)$ – температура, получаемая в результате решения прямой задачи теплопроводности; $T^{ex}(M,\tau)$ – экспериментально полученная температура; τ_0 – момент окончания анализа теплового процесса; β – параметр регуляризации; $\Omega\left[\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)\right]$ – стабилизирующий функционал; $\Delta\left[\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)\right]$ – квадратичный функционал, характеризующий невязку между значениями искомых теплофизических характеристик и значениями этих характеристик, априорно заданными при некоторых температурах в исследуемом диапазоне.

Если искомые функции $\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)$ представить в виде

$$\varphi_i(T) = \sum_{k=1}^{n_i}\alpha_{ks}B_3^{ki}(T),\ i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где $(\alpha_{1i},\ldots,\alpha_{n_i i}) = \overrightarrow{\Lambda_i}$ – векторы искомых параметров, а $B_3^{ki}(T)$ – кубические сплайны Шёнберга, то идентификация искомых функций сводится к определению неизвестных векторов $\overrightarrow{\Lambda_i},\ i=\overline{1,n}$.

Минимизацию функционала (6) проведём итерационным методом [8]. Поскольку температура $T(M,\tau)$ зависит от векторов $\overrightarrow{\Lambda_i},\ i=\overline{1,n}$, ее можно представить на $(p+1)$-й итерации, используя ряд Тейлора, как

$$T^{p+1}(M,\tau,\varphi_1^{p+1}(T),\ldots,\varphi_n^{p+1}(T)) \approx T^p(M,\tau,\varphi_1^p(T),\ldots,\varphi_n^p(T)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{\partial T^p}{\partial\alpha_{ki}}\Delta\alpha_{ki}^{p+1}, \tag{8}$$

где $(\Delta\alpha_{1i}^{p+1},\ldots,\Delta\alpha_{n_i i}^{p+1}) = \Delta\overrightarrow{\Lambda_i^{p+1}},\ i=\overline{1,n}$ – векторы приращений $\Delta\overrightarrow{\Lambda_i^{p+1}} = \overrightarrow{\Lambda_i^{p+1}} - \overrightarrow{\Lambda_i^p}$.

На $(p+1)$-й итерации стабилизирующий функционал запишем как

$$\Omega\left[\varphi_1^{p+1}(T),\ldots,\varphi_n^{p+1}(T)\right] = \sum_{i=1}^{n}\int_{T_{\min}}^{T_{\max}}\left(w_{0i}\left(\varphi_i^{p+1}\right)^2 + w_{1i}\left(\frac{\partial\varphi_i^{p+1}}{\partial T}\right)^2 + w_{2i}\left(\frac{\partial^2\varphi_i^{p+1}}{\partial T^2}\right)^2\right)dT, \tag{9}$$

где $T_{\min}$, $T_{\max}$ – минимальная и максимальная температура в задаче (1)–(5), а w_{0i}, w_{1i}, w_{2i} – весовые множители, которые выбираются в зависимости от априорной информации об искомых теплофизических характеристиках.

Квадратичный функционал $\Delta\left[\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)\right]$, характеризующий невязку между значениями искомых теплофизических характеристик и значениями этих же характеристик, априорно заданными при некоторых температурах в исследуемом диапазоне, может быть построен следующим образом.

Пусть $T_{i1},\ldots,T_{is_i}$ – некоторые температуры из интервала $\left[T_{\min}, T_{\max}\right]$ для i-й искомой функции, а $f_{i1}, f_{i2},\ldots,f_{is_i}$ – соответственно априорные значения этой функции. Тогда квадратичный функционал $\Delta\left[\varphi_1(T),\ldots,\varphi_n(T)\right]$ примет вид

$$\Delta[\varphi_1(T),\ \dots\ ,\varphi_n(T)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} W_{ij}\left(\varphi_i\left(T_{ij}\right) - f_{ij}\right)^2\ , \tag{10}$$

где W_{ij} – весовые множители, которые выбираются, исходя из того, насколько точно заданы априорные значения $f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{is_i}$.

Подставим выражения (7), (8), (9), (10) в функционал (6). Заменяя $T(M,\tau)$ приближённым значением температуры в точках термометрирования и используя необходимое условие минимума функционала (6), получим систему линейных уравнений относительно $\Delta\alpha_{ki}^{p+1}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,n_s}$ на $(p+1)$-й итерации. В систему линейных уравнений входит параметр регуляризации β, который определяем, как мы это делали в работах [12, 13], исходя из условия

$$\left(1-\sqrt{\frac{2}{N}}\right)\sigma \le \delta \le \left(1+\sqrt{\frac{2}{N}}\right)\sigma, \tag{11}$$

которое предлагается в [1]. Здесь N – общее количество термометрических измерений; δ – среднеквадратическое отклонение полученной температуры от измеренной температуры в точках термометрирования.

Считаем, что параметр регуляризации выбран правильно, если для полученного решения по предложенной выше итерационной схеме выполняется двустороннее неравенство (11).

Численный эксперимент

Рассмотрим процесс нагрева тела (бесконечной пластины) с зависящим от температуры внутренним источником тепла и конвективным тепловым потоком с учетом того, что в случае зависимости теплоемкости и коэффициента теплопроводности тела от температуры краевую задачу (1–4) можно представить следующим образом:

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + S(T), \quad x \in [0,l], \tag{12}$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \tag{13}$$

$$\left(-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x} + \alpha T\right)\bigg|_{x=l} = \alpha T_s, \tag{14}$$

$$T(M,\tau)\big|_{\tau=0} = T_0, \tag{15}$$

где l – толщина пластины; $C(T)$ – теплоемкость пластины; $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности пластины; $S(T)$ – внутренний источник теплоты; α – коэффициент теплообмена; T_S – температура конвективного потока; T_0 – начальная температура пластины.

Для проведения численного эксперимента краевой задачи (12–15) взяты безразмерные зависимости $C(T), \lambda(T), S(T)$, которые достаточно точно аппроксимируются кубическими сплайнами Шёнберга с небольшим количеством искомых параметров

$$C(T) = 3{,}4 - 3{,}2T - 0{,}8T^2, \tag{16}$$

$$\lambda(T) = 0{,}1 + 1{,}8T - 0{,}9T^2, \tag{17}$$

$$S(T) = 10{,}0 - 15{,}0T + 5{,}0T^2. \tag{18}$$

Точки термометрирования расположены равномерно по толщине пластины. На полученное численное решение в точках термометрирования наложена случайная ошибка, распределенная по нормальному закону при σ=0,05. Такая случайная ошибка достаточно велика по сравнению с погрешностями измерения современными устройствами, что дает возможность проиллюстрировать эффективность предложенного метода.

На рис. 1–3 представлены зависимости теплоемкости $C(T)$, коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ и внутреннего источника теплоты $S(T)$, полученные с помощью описанного выше метода, и зависимости этих теплофизических характеристик (16)–(18) для следующих безразмерных данных: l=1, n_τ=400, m=21, $\Delta\tau$=0,001, α=2,0, T_s=2,5, T_0=1,0, $T_{\min}$=1,0, $T_{\max}$=2,0, $S(T_{\min})$=0, $S(T_{\max})$=0, $W_{T_{\min}S}=10^5$, $W_{T_{\max}S}=10^5$, $W_{T_{\min}C}=10^5$. Для всех искомых зависимостей, как уже отмечалось выше, выбиралось небольшое количество искомых параметров n_C=5, n_λ=5, n_S=5. Весовые множители в функционале (9) были выбраны согласно рекомендациям работы [1]. В данной задаче для искомых зависимостей коэффициента теплопроводности и теплоемкости использовалась регуляризация второго порядка, а для искомой зависимости внутреннего источника – регуляризация нулевого порядка.

На рис. 4 представлены зависимости $T(M_0, \tau)$, полученные в результате решения прямой и обратной задач, а также «зашумленная» температура в точке $M_0=\{0\}$.

Подбор параметра регуляризации β начинался с β=1,0, а в качестве искомых функций были выбраны следующие начальные зависимости: $\lambda(T)$=0,6, $C(T)$=1,0, и $S(T)$=0. Итерационный процесс подбора β после 5-й итерации закончился при $\beta\approx$0,003906 при достижении среднеквадратичной ошибки $\delta\approx$0,05011.

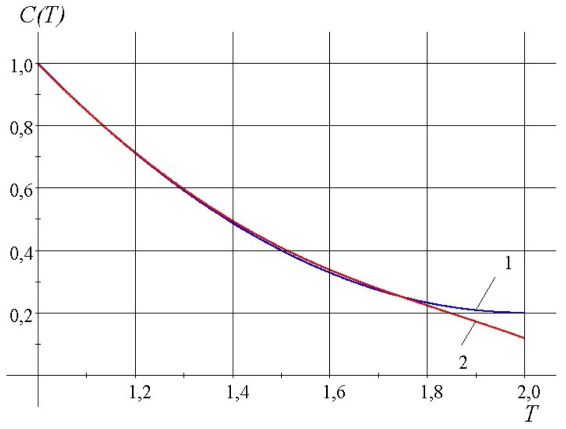

Рис. 1. Зависимости C(T):
1 – в виде (16);
2 – полученная итерационным методом

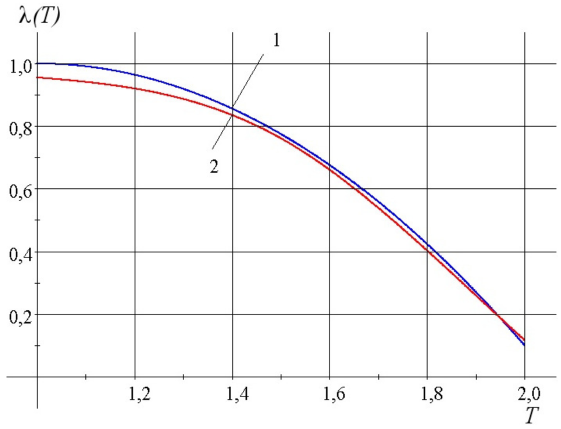

Рис. 2. Зависимости λ(T):
1 – в виде (17);
2 – полученная итерационным методом

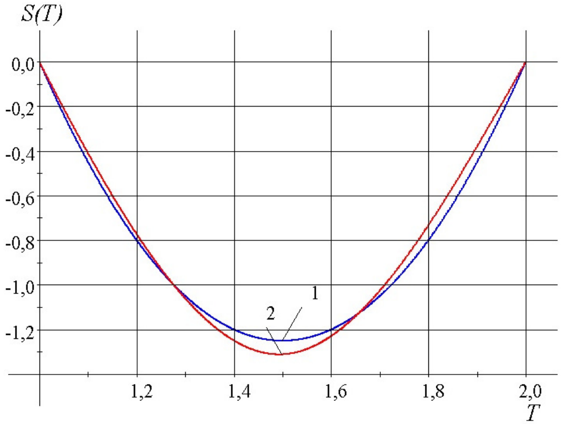

Рис. 3. Зависимости S(T):
1 – в виде (18);
2 – полученная итерационным методом

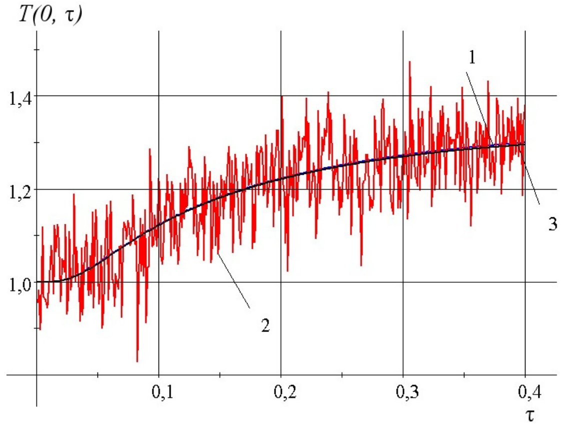

Рис. 4 Зависимости T(0, τ), полученные:
1 – путем решения прямой задачи с использованием характеристик в виде (16–18);
2 – «зашумленным» решением прямой задачи;
3 – с использованием идентифицированных характеристик путем решения обратной задачи

Выводы

Приведенное решение внутренней ОЗТ по идентификации зависящих от температуры теплоемкости, коэффициента теплопроводности и внутреннего источника теплоты свидетельствует о том, что представленный метод идентификации теплофизических характеристик может быть успешно использован при наличии априорной информации об искомых функциях. Если же таковая отсутствует, то предложенный метод тоже может быть применен, но при этом ошибки измерений должны быть сопоставимы с ошибками решения прямых задач.

Представленные в статье исследования выполнены в рамках бюджетной темы III-6-20.

Литература

1. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.) Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
2. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Т. 1. Методология. Киев: Наук. думка, 2002. 408 с.
3. Коздоба Л. А., Круковский П. Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наук. думка, 1982. 360 с.
4. Алифанов,О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
6. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений. Киев: Наук. думка, 2014. 292 с.
7. Мацевитый Ю. М., Мултановский А. В. Одновременная идентификация теплофизических характеристик сверхтвердых материалов. *Теплофизика высоких температур*. 1990. № 5. С. 924–929.
8. Круковский П. Г. Обратные задачи тепломассопереноса (общий инженерный подход). Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 1998. 224 с.
9. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. 68 с.
10. Иванов В. К., Васин В. В., Танака В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М: Наука, 1978. 208 с.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 596 с.
12. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Ганчин В. В. Регионально-аналитическое моделирование и идентификация тепловых потоков с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. *Пробл. машиностроения.* 1999. Т. 2. № 1–2. С. 34–42.
13. Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности. *Пробл. машиностроения*. 2016. Т. 19. № 1. С. 28–36.

Поступила в редакцию 02.03.2020

Багатопараметрична ідентифікація теплофізичних характеристик шляхом розв'язання внутрішньої оберненої задачі теплопровідності

Ю. М. Мацевитий, В. В. Ганчин

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

Розроблено підходи до ідентифікації теплофізичних характеристик з використанням методів розв'язання обернених задач теплопровідності і методу регуляризації А. М. Тихонова. За результатами проведеного експерименту визначаються залежні від температури коефіцієнт теплопровідності, теплоємність, внутрішні джерела теплоти. При цьому теплофізичні характеристики апроксимуються кубічними сплайнами Шьонберга, внаслідок чого їх ідентифікація зводиться до визначення невідомих коефіцієнтів в апроксимаційних залежностях. Отже, температура в тілі буде залежати від цих коефіцієнтів і її можна буде зобразити, використовуючи два члени ряду Тейлора як лінійну комбінацію її частинних похідних з невідомих коефіцієнтів, помножених на приріст цих коефіцієнтів. Підставляючи цей вираз в функціонал Тихонова і використовуючи властивість мінімуму квадратичного функціонала, можна звести розв'язок задачі до розв'язання системи лінійних рівнянь щодо збільшень невідомих коефіцієнтів. Вибравши для початкового наближення певний параметр ре-

гуляризації і деякі функції, можна реалізувати ітераційний процес, в якому вектор невідомих коефіцієнтів для поточної ітерації буде дорівнювати сумі вектора коефіцієнтів з попередньої ітерації і вектора приростів цих коефіцієнтів внаслідок розв'язання системи лінійних рівнянь. Такий ітераційний процес з ідентифікації теплофізичних характеристик для кожного параметра регуляризації дає можливість визначити середньоквадратичний відхил між одержуваною температурою і температурою, яку виміряли внаслідок проведеного експерименту. Залишається підібрати параметр регуляризації таким чином, щоб цей відхил був в межах середньоквадратичної похибки вимірювань. Такий пошук, наприклад, ідентичний алгоритмам пошуку кореня нелінійного рівняння. Під час перевірки ефективності використання запропонованого методу було розв'язано низку тестових задач для тіл з відомими теплофізичними характеристиками. Проведено аналіз впливу випадкових похибок вимірювань на похибку ідентифікованих теплофізичних характеристик досліджуваного тіла.

***Ключові слова**: обернена задача теплопровідності, метод регуляризації А. М. Тихонова, стабілізуючий функціонал, параметр регуляризації, ідентифікація, апроксимація, кубічні сплайни Шьонберга.*

Література

1. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.) Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
2. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Т. 1. Методология. Киев: Наук. думка, 2002. 408 с.
3. Коздоба Л. А., Круковский П. Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наук. думка, 1982. 360 с.
4. Алифанов, О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
6. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений. Киев: Наук. думка, 2014. 292 с.
7. Мацевитый Ю. М., Мултановский А. В. Одновременная идентификация теплофизических характеристик сверхтвердых материалов. *Теплофизика высоких температур*. 1990. № 5. С. 924–929.
8. Круковский П. Г. Обратные задачи тепломассопереноса (общий инженерный подход). Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 1998. 224 с.
9. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. 68 с.
10. Иванов В. К., Васин В. В., Танака В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М: Наука, 1978. 208 с.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 596 с.
12. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Ганчин В. В. Регионально-аналитическое моделирование и идентификация тепловых потоков с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. *Пробл. машиностроения*. 1999. Т. 2. № 1–2. С. 34–42.
13. Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности. *Пробл. машиностроения*. 2016. Т. 19. № 1. С. 28–36. https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.028.