

УДК 629.01

ІНТЕГРАЛЬНИЙ КРИТЕРІЙ НЕРІВНОМІРНОСТІ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРИ ТОПОЛОГІЧНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ 2D-МОДЕЛЕЙ

І. В. Янчевський,

д-р фіз.-мат. наук

i.yanchevskyi@kpi.ua

ORCID: 0000-0002-7113-2276

В. Ф. Кришталь

канд. техн. наук

v.kryshstal@kpi.ua

ORCID: 0000-0002-5597-2435

Національний технічний
університет України
«Київський політехнічний
інститут імені Ігоря
Сікорського»

03056, Україна, м. Київ-56,
пр. Перемоги, 37

Поява нових технологій виробництва конструктивних елементів дає поштовх до розвитку нових технологій їх конструювання, зокрема, із залученням методу топологічної оптимізації. Найбільш розповсюджений алгоритм проектування топологічно оптимальних конструкцій орієнтований на зменшення їх пружної податливості при заданому об'ємі матеріалу. Разом з тим більш близькою до інженерного підходу у проектуванні є мінімізація об'єму конструктивного елемента при одночасному обмеженні виникаючих механічних напружень. На відміну від класичних алгоритмів такого підходу, що обмежують значення напружень в певних точках, в даній роботі розвинуто альтернативний критерій – формування образу конструктивного елемента здійснюється на основі мінімізації інтегрального параметра нерівномірності розподілу напруженого стану. В основу розробленого алгоритму покладено метод пропорційної топологічної оптимізації, а при обчисленні механічних напружень застосовані класичні співвідношення методу скінченних елементів. Зазначений вище параметр може бути інтерпретований як відношення відхилення впорядкованих у порядку зростання значень еквівалентних за Мізесом напружень у скінченних елементах розрахункової моделі від лінійної їх апроксимації до відповідного середнього значення. При цьому пошук оптимального результату здійснюється для усього діапазону можливих значень осередненої «густини» розрахункової області, що пов'язано зі зменшенням кількості вхідних даних. Запропонований інтегральний критерій міцності забезпечує кращу рівномірність оптимізованої топології, дозволяє згладжувати вплив локальних пікових значень механічних напружень і визначає єдиний результат оптимізації, який є стійким до похибок при обчисленнях. Алгоритм реалізовано у програмному середовищі MatLab для двовимірних моделей. Ефективність підходу апробовано на оптимізації класичної балки (tbb-балки), консольної балки і L-балки. Наведено порівняльний аналіз отриманих результатів з наявними у літературі. Показано, що за відсутності обмеження на осереднене значення густини скінченно-елементної моделі запропонований критерій дає «більш легкий» результат оптимізації у порівнянні з класичним (приблизно на 40%), водночас значення «індексу контрастності» є досить близькими.

Ключові слова: топологічна оптимізація; двовимірна задача; умова міцності; інтегральний критерій; алгоритм; метод скінченних елементів; еквівалентні за Мізесом напруження.

Вступ

Термін оптимізація структурної топології було вперше введено у роботі [1], у якій розглядався алгоритм розподілу штучного композитного матеріалу з використанням співвідношень методу скінченних елементів. При цьому оптимізація топології проводилась за відсутності попередніх припущень або інформації про розподіл проектувальних величин і передбачає оптимізацію як форми деталі, так і включень у вигляді порожнин.

На сучасному етапі поява нових технологій виробництва, зокрема адитивних, а також вимоги зменшення ваги та вартості дають поштовх до розвитку нових технологій конструювання. Це дозволяє робити конструкції більш легкими та міцними одночасно, що знайшло відображення у технологіях проектування, наприклад, авіаційних конструкцій, космічної техніки, машинобудування [2].

При проектуванні топологічно оптимальних конструкцій розрізняють дві задачі, одна з яких – задача зменшення пружної податливості елемента при заданому об'ємі матеріалу, а друга спрямована на мінімізацію об'єму (матеріалу) конструктивного елемента при одночасному обмеженні виникаючих механічних напружень.

Для розв'язання першої задачі досить успішно використовують SIMP-метод (Solid Isotropic Material with Penalization), який називають методом штрафування. Ефективність методу підтверджена чис-

Стаття доступна за ліцензією Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.

© І. В. Янчевський, В. Ф. Кришталь, 2021

ленними публікаціями, зокрема [3–6]. Метод SIMP ґрунтується на розбитті області проектування скінченними елементами з введенням змінної відносної густини ρ_i їх матеріалу ($0 \leq \rho_i \leq 1$: $\rho_i = 0$ моделює відсутність скінченного елемента (СЕ), $\rho_i = 1$ означає повністю «твердий» СЕ). У свою чергу, модуль Юнга СЕ вважається залежним від степеневі функції відносної густини. На СЕ з поточною відсною густиною $\rho'_i > 1$ або $\rho'_i \approx 0$ накладається так зване штрафування, що дозволяє в процесі оптимізації отримувати відносну густину близькою до одиниці або нуля (тобто залишити СЕ або «відкинути» його).

Розв'язання задач топологічної оптимізації з урахуванням обмежень на напруження було викладено в роботах [7, 8], де розглядається так званий «еволюційний» метод оптимізації конструкції ESO (Evolutionary Structural Optimization). За цим методом, на підставі скінченно-елементного аналізу, визначається розподіл напружень в конструкції та робиться висновок стосовно доцільності залучення СЕ із застосуванням «критерію видалення». Цей критерій використовує значення еквівалентних за Мізесом напружень для усієї конструкції і для окремого СЕ. Недовантажені на певний відсоток СЕ з конструкції видаляються. Цикл скінченно-елементного аналізу та видалення СЕ повторюється при одному значенні «критерію видалення» до досягнення стійкого результату. Потім значення «критерію видалення» збільшується і процедура ітерацій повторюється. Процес вважається закінченим, коли видалено усі СЕ з еквівалентним за Мізесом напруженням, яке складає заданий відсоток від максимального. Недоліком методу є те, що видалений на попередніх ітераціях матеріал, який міг би бути використаний в подальшому, не відновлюється. Цього недоліку позбавлений метод BESO (Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization Method) [9]. У методі BESO за результатом скінченно-елементного аналізу екстраполюються переміщення видалених СЕ і визначається їх число (індекс) чутливості як зміна піддатливості СЕ внаслідок видалення або додавання СЕ. Після ранжування усіх СЕ за числами чутливості «заповнені» матеріалом СЕ конструкції з мінімальним числом чутливості видаляються, а «пусті» з максимальним індексом чутливості повертаються в структуру конструкції.

Як зазначено в [10], аналіз механічних напружень в задачах топологічної оптимізації є більш близьким до інженерного підходу при проектуванні. Під задачею визначення оптимальної топології пропонується розуміти отримання структур на основі застосування методу рівномірних конструкцій.

Оптимізація топології при одночасному обмеженні на значення виникаючих механічних напружень ускладнюється такими проблемами, як нелінійність відповідної задачі та явище сингулярності [3]. Останнє пов'язано з тим, що напруження стає невизначеним в областях, де густина наближається до нуля. Це явище сингулярності описано в [11] при оптимізації топології фермних конструкцій з урахуванням обмежень на рівень напруженого стану. Зазначена особливість викликана появою ділянок, на яких площа поперечного перерізу наближається до нуля.

Одним зі способів застосування обмеження напружень в задачі оптимізації структурної топології є підхід локальних обмежень механічних напружень у визначених точках [12]. Інший підхід полягає в перетворенні цих обмежень в єдине глобальне обмеження з використанням деякої функції агрегації, такої, як p -норма або функція Крейссельмейєра-Штайнхаузера [13, 14].

Мета роботи

В даній роботі запропоновано альтернативний критерій формування образу конструктивного елемента з використанням інтегрального параметра нерівномірності розподілу напруженого стану і показано його ефективність на конкретних прикладах. В основу розробленого алгоритму покладено метод пропорційної топологічної оптимізації з обмеженням напружень, який наведено у роботі [15].

Класична постановка задачі топологічної оптимізації

Задача топологічної оптимізації конструктивного елемента з обмеженнями на рівень його напруженого стану полягає в мінімізації умовної маси розрахункової геометричної області елемента з урахуванням виконання умови міцності – максимальні значення механічного напруження не повинні перевищувати певне допустиме значення $[\sigma]$. Вказана задача зазвичай розв'язується в автоматизованому режимі, який передбачає залучення методу скінченних елементів (МСЕ) для обчислення поля механічних напружень. І якщо розрахункову область конструктивного елемента розбити на N скінченних елементів та механічне напруження, «відносно» густину і об'єм (площу у випадку двовимірних розрахункових моделей) i -го СЕ даної області позначити через $\tilde{\sigma}_i$, ρ_i і V_i , відповідно, то задача оптимізації при цьому може бути записана таким чином:

$$\begin{cases} \sum_i \rho_i V_i \rightarrow \min (i = \overline{1, N}); \\ \tilde{\sigma}_i \leq [\sigma]. \end{cases} \quad (1)$$

Розрахунковою змінною в цій задачі є «відносна» густина ρ кожного елемента скінченно-елементної моделі ($0 \leq \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1$; i – порядковий номер СЕ; ρ_{\min} – мінімальне значення густини), яка пов’язана з масою даного СЕ ($m_i = \rho_i V_i$) і також визначає його «відносний» модуль пружності E (модуль Юнга). Згідно з модифікованим SIMP методом [3] значення E залежить від густини СЕ

$$E(\rho) = E_{\min} + \rho^p (E_0 - E_{\min}),$$

де E_{\min} – мінімальне значення модуля Юнга, яке характеризує «пусті» СЕ з $0 \leq \rho \leq \rho_{\min}$; $E_0 = 1$; p – коефіцієнт «штрафу». Зазвичай $E_{\min} = 10^{-9}$ і $p = 3$.

Під механічним напруженням $\tilde{\sigma}_i$ в i -му СЕ у виразі (1) зазвичай розуміють еквівалентне напруження, обчислене в його геометричному центрі за енергетичною теорією міцності. У випадку двовимірної розрахункової схеми зазначене напруження виражається через компоненти тензору механічних напружень $\sigma = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy}\}^T$ для відповідного СЕ

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}. \quad (2)$$

Компоненти σ залежать від вектора \mathbf{u} , який містить вузлові переміщення СЕ, і, згідно до основ розв’язання задач МСЕ, обчислюється за формулою

$$\sigma = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (3)$$

Тут \mathbf{D} – матриця пружних постійних ($\mathbf{D} = \mathbf{D}(E, \nu)$; ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу СЕ); \mathbf{B} – матриця з похідними від базисних функцій. Для плоского напруженого стану та білінійних функцій форми квадратного СЕ безвимірної одиничної довжини ці матриці та вектор визначаються так [15]:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \{u_{2x} \ u_{2y} \ u_{4x} \ u_{4y} \ u_{3x} \ u_{3y} \ u_{1x} \ u_{1y}\}^T.$$

При цьому матриця \mathbf{B} і вектор \mathbf{u} відповідають системі координат і нумерації вузлів СЕ, які зображені на рис. 1. Слід зазначити, що така послідовність номерів вузлів є досить поширеною в роботах, які присвячені задачам топологічної оптимізації [4, 15].

Компоненти вектора \mathbf{u} , в свою чергу, входять до складу глобального вектора переміщень \mathbf{U} для усієї скінченно-елементної моделі і визначаються з системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (4)$$

де \mathbf{K} – глобальна матриця жорсткості, яку, аналогічно до вектору \mathbf{U} , отримують в результаті об’єднання елементних матриць; \mathbf{F} – вектор вузлових зусиль.



Рис. 1. Нумерація вузлів плоского скінченного елемента

На підставі результатів скінченно-елементного аналізу (3) і (4) напружено-деформованого стану конструктивного елемента на наступному етапі обчислюється попереднє значення «відносної» густини кожного СЕ ρ'_i моделі як лінійна комбінація густини ρ_i^{prev} на попередній ітерації і «оптимального» ρ_i^{opt} , що залежить від рівня напруженого стану даного СЕ. Зокрема, в літературі використовуються такі співвідношення:

$$\rho'_i = \alpha \cdot \rho_i^{\text{prev}} + (1 - \alpha) \cdot \rho_i^{\text{opt}}; \quad \rho_i^{\text{opt}} = R \frac{\tilde{\sigma}_i^q}{\sum_i \tilde{\sigma}_i^q}. \quad (5)$$

Тут α – «коефіцієнт історії» [15]: ($\alpha=0,5$ означає, що густина СЕ ρ'_i на поточній ітерації буде середнім арифметичним ρ_i^{prev} і ρ_i^{opt}); R – залишкова кількість матеріалу (осереднена густина моделі); q – показник степеня.

Слід зауважити, що коефіцієнти α і q є основними параметрами [15], які визначають ефективність / збіжність розв'язання задачі топологічної оптимізації (1). Разом з тим, наявні в літературі результати численних розрахунків свідчать про те, що доцільними є значення $\alpha=0$ і $q=2$. Перша рівність, очевидно, не враховує елементну густину з попередньої ітерації і, відповідно, вказує на відсутність залежності від «історії», друга – на доцільність залучення квадратичної пропорції між ρ_i^{opt} і $\tilde{\sigma}_i$ – тобто кількість матеріалу має розподілятися серед СЕ пропорційно квадрату значень елементних напружень.

Обов'язковим і заключним етапом кожної ітерації при визначенні розподілу густини за скінченно-елементною моделлю є фільтрація попереднього значення цієї густини ρ'_i . Зазначена фільтрація дозволяє уникати зубчастих країв, вузьких СЕ, гострих границь, явища «шахової дошки», тощо. Дана фільтрація є, по суті, локальним осередненням густин в околі конкретного СЕ, зберігаючи при цьому значення осередненої густини усєї розрахункової області $\sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i$. Сам алгоритм фільтрації ґрунтується на такій формулі:

$$\rho_i = \sum_j w_{ij} \rho'_j / \sum_j w_{ij}; \quad 0 \leq \rho_{\min} < \rho_i \leq 1. \quad (6)$$

Тут ρ_i – «відфільтрована» густина i -го СЕ; w_{ij} – вагова функція, яка обернено пропорційна відстані між i -м СЕ та сусідніми з ним СЕ з номерами j

$$w_{ij} = \begin{cases} (r_0 - r_{ij})/r_0 & \text{при } r_{ij} < r_0; \\ 0 & \text{при } r_{ij} \geq r_0, \end{cases}$$

r_{ij} – відстань між i -м та j -м СЕ; r_0 – радіус «фільтра».

Алгоритм топологічної оптимізації

В основу більшості алгоритмів топологічної оптимізації, які орієнтовані на перевірку виконання умови міцності, покладені такі процедури. На першому етапі здійснюється формування векторів \mathbf{U} , \mathbf{F} і матриць \mathbf{D} , \mathbf{B} і \mathbf{K} для реалізації скінченно-елементного аналізу. Потім алгоритм входить в основний цикл, кожна ітерація якого починається з визначення поля деформацій (4) і механічних напружень (3). Далі обчислюються еквівалентні напруження $\tilde{\sigma}_i$ (2) елементів СЕ-моделі ($i = \overline{1, N}$) і перевіряється критерій зупинення (1) – тобто, чи є максимальне значення $\tilde{\sigma}_i$ близьким до допустимої границі напруження – $[\sigma]$ ($\max(\tilde{\sigma}_i) = [\sigma]$). Якщо умова виконується, то ітераційний процес завершується. Інакше кажучи, алгоритм продовжує оптимізувати топологію і переходить у внутрішній цикл. Першим кроком даного циклу є уточнення цільової кількості матеріалу (осередненої густини) R , яка буде новою кількістю матеріалу моделі $\sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i$ для наступної ітерації. Якщо максимальне значення механічного напруження в елементах розрахункової системи перевищує допустиму границю ($\max(\tilde{\sigma}_i) > [\sigma]$), тобто умова міцності не виконується, то поточна кількість матеріалу збільшується на певний, заздалегідь встановлений коефіцієнт Δ – $R = \sum_i \rho_i^{\text{prev}} V_i / \sum_i V_i + \Delta$ (тут $\sum_i \rho_i^{\text{prev}} V_i / \sum_i V_i$ – поточна кількість матеріалу). Інакше, кількість матеріалу зменшується з тим самим коефіцієнтом – $R = \sum_i \rho_i^{\text{prev}} V_i / \sum_i V_i - \Delta$. На наступному кроці алгоритм за допомогою ітеративної процедури (5) і (6) розподіляє R серед основних скінченних елементів. Сам алгоритм зображено на рис. 2.

- ◆ Налаштування матриць і векторів для СЕ-аналізу і фільтрації
 - ◆ Запуск основного циклу топологічної оптимізації
 - виконання СЕ-аналізу
 - перевірка критеріїв зупинення (переривання циклу, якщо їх задоволено)
 - запуск алгоритму визначення «умовної» густини СЕ
 - Визначити цільову кількість матеріалу R
 - При невиконанні умови міцності $R = \sum_i \rho_i^{\text{prev}} V_i / \sum_i V_i + \Delta$
 - При виконанні умови міцності $R = \sum_i \rho_i^{\text{prev}} V_i / \sum_i V_i - \Delta$
 - Обнулити дані про густину ($\rho_i = 0$)
 - Доки $R - \sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i$ не буде досить малим
 - Визначити ρ_i^{opt} і розподілити ρ'_i
 - Застосувати фільтр для обчислення густини ρ_i
 - Оновити поле розподілу густини ρ_i
- Рис. 2. Алгоритм топологічної оптимізації**

Така послідовність реалізована, зокрема, у публікації [15], де автори запропонували алгоритм пропорційної оптимізації, ефективність якої апробована на низці конкретних числових прикладів.

Основним недоліком даного підходу є необхідність наявності у вхідних даних наперед невідомого значення допустимого напруження $[\sigma]$, яке узгоджують з полем механічного напруження деталі, що проектується, під час дії одиничного силового навантаження. Даний недолік пов'язаний з тим, що для різних розрахункових схем значення $[\sigma]$ може відрізнятись у досить широкому діапазоні. Тому наперед передбачити оптимальне $[\sigma]$, за якого задача оптимізації матиме стійкий розв'язок, досить складно. Очевидно, у цьому випадку визначення і коригування $[\sigma]$ необхідно проводити в ручному режимі.

Другим, більш вагомим недоліком вказаного класу алгоритмів, є використання максимального значення механічного напруження $\max(\tilde{\sigma}_i)$. Очевидно, що для більшості прикладних задач розрахунку на міцність, $\max(\tilde{\sigma}_i)$ є відображенням напруженого стану в околі певного концентратора напружень i , відповідно, не визначає напружений стан проектної деталі у цілому, оскільки має досить локальний характер. Так, на рис. 3 зображений класичний розподіл механічного напруження $\tilde{\sigma}_i$ елементів скінченно-елементної моделі з ненульовою густиною ($\rho_i > \rho_{\min}$), які розташовані у порядку їх зростання.

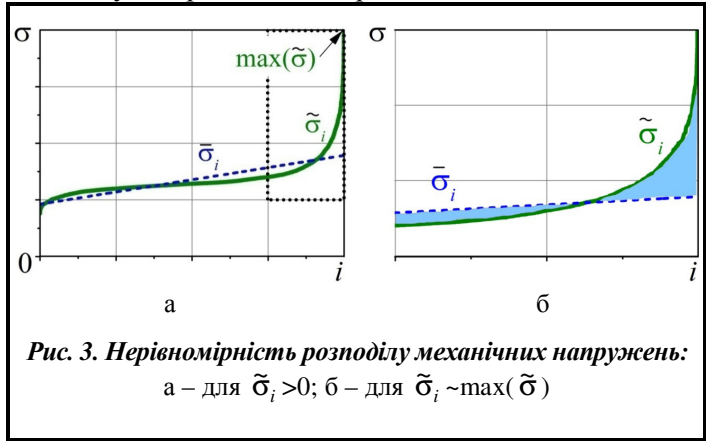


Рис. 3. Нерівномірність розподілу механічних напружень:
 а – для $\tilde{\sigma}_i > 0$; б – для $\tilde{\sigma}_i \sim \max(\tilde{\sigma})$

Очевидно, що $\max(\tilde{\sigma}_i)$ в рази перевищує осереднене значення напруження, яке відповідає напруженням в центральній області рисунка (суцільна крива). При проектуванні реальних деталей для уникнення пікових значень поля механічних напружень i , відповідно, суттєвого зменшення максимальних їх значень, залучають різноманітні конструктивні рішення та технологічні прийоми. Тому при реалізації топологічної оптимізації орієнтування на критерій $\max(\tilde{\sigma}_i) = [\sigma]$ не є доцільним.

У даній роботі запропоновано альтернативну умову міцності для системи (1), яка орієнтована на мінімізацію нерівномірності розподілу напруженого стану серед СЕ з ненульовою відносною густиною ($\rho_i > \rho_{\min}$). Зокрема, замість критерію $\max(\tilde{\sigma}_i) = [\sigma]$ ставиться задача пошуку мінімуму функції,

$$\sum_i |\tilde{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i| / \sum_i |\bar{\sigma}_i| \rightarrow \min, \text{ і оптимізаційна задача (1) запишеться як}$$

$$\begin{cases} \sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i \rightarrow \min; \\ \sum_i |\tilde{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i| / \sum_i |\bar{\sigma}_i| \rightarrow \min. \end{cases} \quad (7)$$

Тут $\bar{\sigma}_i$ – лінійна апроксимація впорядкованих значень $\tilde{\sigma}_i$. Коефіцієнти апроксимації визначаються методом найменших квадратів.

Очевидно, що перша умова системи (7) пов’язана з мінімізацією осередненого значення густини R розрахункової області скінченно-елементної моделі деталі ($R = \sum_i \rho_i V_i / \sum_i V_i ; i = \overline{1, N}$). Друга умова, з геометричної точки зору, означає мінімізацію відношення площі $\|\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}\|_1$ області між еквівалентними за Мізесом напруженнями $\tilde{\sigma}_i$ і лінійною їх апроксимацією $\bar{\sigma}_i$ до площі трапеції $\|\bar{\sigma}\|_1$ під прямою $\bar{\sigma}_i$. Тут $\|f\|_1$ – норма вектора f у метриці L^1 ($\|f\|_1 = \sum_i |f_i|$). Фрагмент площі $\|\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}\|_1$ виділено суцільним кольором на рис. 3, б, який, по суті, є збільшеним зображенням пунктирної зони у правій частині рис. 3, а. Площа трапеції $\|\bar{\sigma}\|_1$ дорівнює добутку середнього значення вектора-стовпця напружень $\bar{\sigma}$ на його висоту.

Якщо ввести параметр $X = \|\tilde{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i\|_1 / \|\bar{\sigma}_i\|_1$, то задача (7) може бути записана у більш компактному вигляді

$$\begin{cases} R \rightarrow \min; \\ X \rightarrow \min. \end{cases} \quad (8)$$

Числові результати

Конкретні обчислення проведені для плоских розрахункових схем, які були розглянуті у роботі [15]. Зокрема, для моделей класичної балки (mbb-балки), консольної балки і L-балки (стовпець 1 рис. 4), на які діють одиничні силові навантаження ($P=1$). При цьому габарити зазначених моделей визначаються безвимірним параметром $s=40$ (скінченними елементами є квадрати з одиничною довжиною сторін, $V_i=1$).

Результати топологічної оптимізації на підставі критерію (1), які зображені у стовпчику 2 рис. 4, були отримані авторами публікації [15]. При цьому слід зазначити, що обмеження для максимального значення напруження $[\sigma]$ для першої балки у вказаній роботі прийнято рівним 1,08, для другої – 0,57, а для третьої – 1,05. Також під час проведення СЕ-аналізу зовнішнє навантаження було розподілено на певній кількості сусідніх СЕ для поліпшення збіжності обчислювального процесу.

Результати топологічної оптимізації даних розрахункових схем з використанням критерію (8) зображені у стовпчику 3 рис. 4.

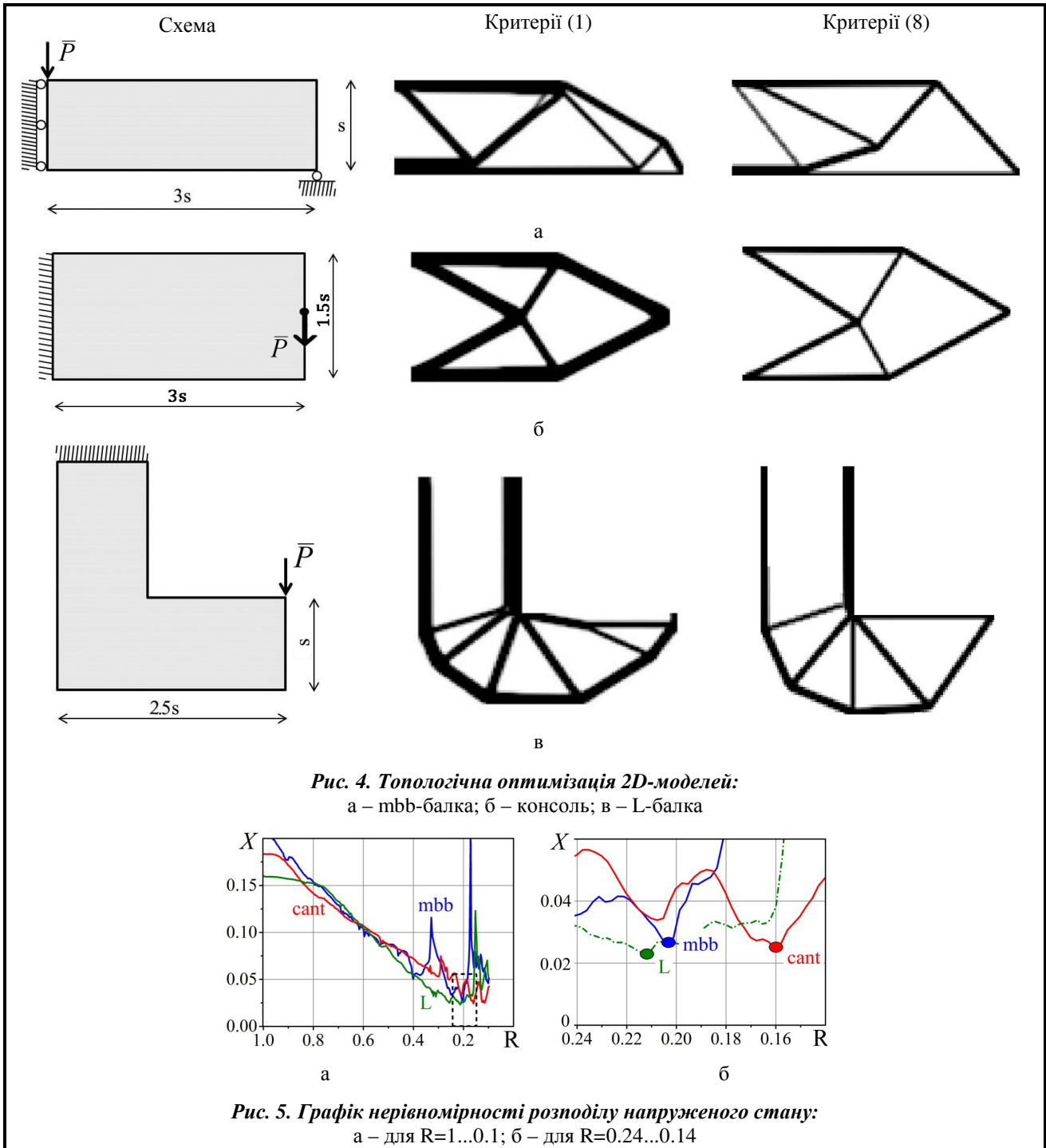
З порівняння результатів оптимізації можна зробити висновок, що за відсутності обмеження на осереднене значення густини R скінченно-елементної моделі критерій (8) у порівнянні з умовами (1) дає «більш легкий» результат (приблизно на 40%). Кількісні показники для обох критеріїв зведені у таблицю, де є також значення так званого «індексу контрастності» C [15], який характеризує частку СЕ з граничними значеннями відносної густини ($\rho < \rho_{\min}$ і $\rho \geq \rho_{\max}$)

$$C = 1 - \frac{N_p}{N},$$

де N_p – кількість скінченних елементів з густиною $\rho_{\min} < \rho < 1 - \rho_{\min}$ ($\rho_{\min}=0,01$).

Осереднена густина R оптимізованих конструктивних елементів та їх індекс контрастності C

Схема	Густина R		Індекс C	
	Критерій (1)	Критерій (8)	Критерій (1)	Критерій (8)
mbb-балка	0,31	0,20	0,83	0,812
консоль	0,34	0,16	0,88	0,856
L-балка	0,33	0,21	0,85	0,848



Очевидно, що на відміну від R індекси контрастності C для обох критеріїв оптимізації відрізняються несуттєво.

Слід зазначити, що результати оптимізації у третьому стовпчику на рис. 4 відповідають, по суті, мінімуму функції $X=X(R)$, оскільки проведені числові розрахунки показали, що на усьому діапазоні можливих значень R ($\frac{1}{10} \leq R \leq 1$) функція $X=X(R)$ має єдиний мінімум. Графіки цих функцій для трьох розглянутих вище розрахункових схем зображені однойменними кривими на рис. 5. Рис. 5, б є збільшеним прямокутним фрагментом, який обмежений на рис. 5, а штриховою границею.

На рис. 5, б кружками виділено мінімуми графіків, які відповідають розв'язкам задачі топологічної оптимізації (8), зображених у стовпчику 3 на рис. 4. Слід зауважити, що графіки на рис. 5, а

побудовані в режимі лінійного зменшення R від 1 до volfrac [15], разом з тим вибір початкового значення R_0 не є принциповим (зазвичай приймають $\text{volfrac} \leq R_0 \leq 0,5$ для пришвидшення обчислень).

Недоліком наведеного у даній роботі критерію (8) є необхідність розв'язання задачі пошуку оптимальної геометрії на усьому діапазоні можливих значень осередненої густини R , що дещо збільшує час розв'язання задачі топологічної оптимізації (8) у порівнянні з класичною постановкою (1). Разом з тим, сканування відбувається при мінімальній кількості вхідних даних та за відсутності потреби попереднього визначення $[\sigma]$, що вказує на переваги даного критерію. Критерій $X(R) \rightarrow \min$ також являє собою інтегральний критерій, тому він дозволяє отримувати розв'язок, який є більш стійким до похибок у вхідних даних та неточностей у обчисленнях.

Висновки

В роботі наведено новий критерій для топологічної оптимізації конструктивних елементів, який орієнтований на мінімізацію нерівномірності розподілу їх напруженого стану. На відміну від вже існуючих алгоритмів топологічної оптимізації на основі класичної умови міцності, запропонований алгоритм використовує інтегральну оцінку напруженого стану, що дозволяє зменшити вплив локальних пікових значень напружень і забезпечити кращу рівномірність проектної деталі. Зазначений інтегральний критерій може бути інтерпретований як відношення відхилення впорядкованих значень еквівалентних за Мізесом напружень від лінійної їх апроксимації до середнього значення. До недоліків методу слід віднести потребу у пошуку оптимального результату на усьому діапазоні можливих значень осередненої густини розрахункової області. Однак є принципові переваги наведеного методу – зменшена кількість вхідних даних, забезпечення кращої рівномірності оптимізованої топології, наявність єдиного результату оптимізації, нечутливість до похибок у обчисленнях. Ефективність критерію підтверджена на числових прикладах з традиційними розрахунковими схемами. Розроблений підхід може бути розвинуто для розв'язання задач топологічної оптимізації у тривимірній постановці, а також узагальнено на випадок оптимізації конструктивного елемента за критерієм його утомної міцності.

Література

1. Bendsoe M. P., Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods Appl. Mech. and Eng.* 1988. Vol. 71. Iss. 2. P. 197–224. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2).
2. Боровиков А. А., Тененбаум С. М. Топологическая оптимизация переходного отсека КА. *Аэрокосм. науч. журн.* 2016. № 2. С. 16–30. <https://doi.org/10.7463/aersp.0516.0847780>.
3. Bendsoe M. P., Sigmund O. Topology optimization: theory, methods and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 370 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6_2.
4. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. Vol. 21. Iss. 2. P. 120–127. <https://doi.org/10.1007/s001580050176>.
5. Andreassen E., Clausen A., Schevenels M., Lazarov B. S., Sigmund O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2011. Vol. 43. Iss. 1. P. 1–16. <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0594-7>.
6. Liu K., Tovar A. An efficient 3D topology optimization code written in MatLab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014. Vol. 50. Iss. 6. P. 1175–1196. <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1107-x>.
7. Xie Y. M., Steven G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*. 1993. Vol. 49. Iss. 5. P. 885–896. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90035-C](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90035-C).
8. Huang X., Xie Y. M. Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications. UK: Wiley, 2010. 223 p. <https://doi.org/10.1002/9780470689486>.
9. Xia L., Xia Q., Huang X., Xie Y. M. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: A comprehensive review. *Archives Computational Methods in Eng.* 2018. Vol. 25. Iss. 2. P. 437–478. <https://doi.org/10.1007/s11831-016-9203-2>.
10. Сысоева В. В., Чедрик В. В. Алгоритмы оптимизации топологии силовых конструкций. *Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та.* 2011. Т. XLII. № 2. С. 91–101.
11. Kirsch U. On singular topologies in optimum structural design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 1990. Vol. 2. Iss. 3. P. 133–142. <https://doi.org/10.1007/BF01836562>.
12. Duysinx P., Bendsoe M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *Int. J. for Numerical Methods in Eng.* 1998. Vol. 43. P. 1453–1478. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19981230\)43:8<1453::AID-NME480>3.0.CO;2-2](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19981230)43:8<1453::AID-NME480>3.0.CO;2-2).

13. Le C., Norato J., Bruns T., Ha C., Tortorelli D. Stress based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2010. Vol. 41. Iss. 4. P. 605–620. <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0440-y>.
14. Lee E., James K. A., Martins J. R. Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2012. Vol. 46. Iss. 5. P. 647–661. <https://doi.org/10.1007/s00158-012-0780-x>.
15. Biyikli E., To A. C. Proportional Topology Optimization: A new non-gradient method for solving stress constrained and minimum compliance problems and its implementation in MATLAB. *PLoS ONE*. 2015. No. 10. P. 1–18. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0145041>.

Надійшла до редакції 12.02.2021

Интегральный критерий неравномерности распределения напряженного состояния при топологической оптимизации 2D-моделей

И. В. Янчевский, В. Ф. Крышталь

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

03056, Украина, г. Киев-56, пр. Победы, 37

Появление новых технологий производства конструктивных элементов дает толчок к развитию новых технологий их конструирования, в том числе с привлечением метода топологической оптимизации. Наиболее распространенный алгоритм проектирования топологически оптимальных конструкций ориентирован на уменьшение их упругой податливости при заданном объеме материала. Вместе с тем более близким к инженерному подходу в проектировании является минимизация объема конструктивного элемента при одновременном ограничении возникающих механических напряжений. В отличие от классических алгоритмов такого подхода, ограничивающих значение напряжений в определенных точках, в данной работе развит альтернативный критерий – формирование образа конструктивного элемента осуществляется на основе минимизации интегрального параметра неравномерности распределения напряженного состояния. В основу разработанного алгоритма положен метод пропорциональной топологической оптимизации, а при вычислении механических напряжений применены классические соотношения метода конечных элементов. Упомянутый данный параметр может быть интерпретирован как отношение отклонения упорядоченных в порядке возрастания значений эквивалентных по Мизесу напряжений в конечных элементах расчетной модели от линейной их аппроксимации к соответствующему среднему значению. При этом поиск оптимального результата осуществляется для всего диапазона возможных значений осредненной «плотности» расчетной области, что связано с уменьшением количества входных данных. Предложенный интегральный критерий прочности обеспечивает лучшую равнопрочность оптимизированной топологии, позволяет сглаживать влияние локальных пиковых значений механических напряжений и определяет единый результат оптимизации, который является устойчивым к ошибкам при вычислениях. Алгоритм реализован в программной среде MatLab для двухмерных моделей. Эффективность подхода апробирована на оптимизации классической балки (tbb-балки), консольной балки и L-балки. Представлен сравнительный анализ полученных результатов с имеющимися в литературе. Показано, что при отсутствии ограничения на усредненные значения плотности конечно-элементной модели предложенный критерий дает «более легкий» результат оптимизации по сравнению с классическим (примерно на 40%), в то же время значения «индекса контрастности» достаточно близки.

Ключевые слова: топологическая оптимизация; двухмерная задача; условие прочности; интегральный критерий; алгоритм; метод конечных элементов; эквивалентные по Мизесу напряжения.