

УДК 536.24

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕНЗОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Ю. М. Мацевитый,
академик НАН Украины
matsevit@ipmach.kharkov.ua
ORCID: 0000-0002-6127-0341

В. В. Ганчин
gan4ingw@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9242-6460

Институт проблем
машиностроения
им. А. Н. Подгорного
НАН Украины,
61046, Украина, г. Харьков,
ул. Пожарского, 2/10

На основе теории регуляризации А. Н. Тихонова разработана методика решения обратных задач теплопроводности по идентификации тензора теплопроводности в двухмерной области. Такие задачи заменяются на задачи по идентификации главных коэффициентов теплопроводности и угла ориентации главных осей, а главные коэффициенты аппроксимируются кубическими сплайнами Шёнберга. В результате задача сводится к определению неизвестных коэффициентов в этих аппроксимациях и угла ориентации главных осей. При известных граничных и начальных условиях температура в области будет зависеть только от этих коэффициентов и угла ориентации. Если выразить её по формуле Тейлора для двух членов ряда и подставить в функционал Тихонова, то определение приращений коэффициентов и приращения угла ориентации можно свести к решению системы линейных уравнений относительно этих приращений. Выбрав некоторый параметр регуляризации и некоторые функции для главных коэффициентов теплопроводности и угла ориентации в качестве начального приближения, можно реализовать итерационный процесс определения этих коэффициентов. Получив векторы коэффициентов и угол ориентации в результате сходящегося итерационного процесса, можно определить среднеквадратическую невязку между получаемой температурой и температурой, измеренной в результате проведенного эксперимента. Остается подобрать параметр регуляризации таким образом, чтобы эта невязка была в пределах среднеквадратичной погрешности ошибки измерений. При проверке эффективности использования предложенного метода решен ряд двухмерных тестовых задач для тел с известными тензорами теплопроводности. Проанализировано влияние случайных погрешностей измерений на погрешность идентификации тензора теплопроводности.

Ключевые слова: внутренняя обратная задача теплопроводности, тензор теплопроводности, метод регуляризации А. Н. Тихонова, стабилизирующий функционал, параметр регуляризации, идентификация, аппроксимация, кубические сплайны Шёнберга.

Введение

В настоящее время обратные задачи, то есть такие задачи, в которых причинные характеристики физических процессов определяются по результатам измерений или по другим следственным проявлениям, уверенно заняли свою нишу при исследовании физических процессов различной природы, в том числе и теплофизических. Решение внутренних обратных задач теплопроводности (ОЗТ) по идентификации тензора теплопроводности в анизотропных материалах имеет особое значение на этапе построения математических моделей тепловых процессов в большинстве теплозащитных материалов, используемых, например, в современной аэрокосмической технике (стеклопластики, асбобластики, углеродные пластики, большинство графитов и графитосодержащих материалов). Это связано с тем, что перенос тепла в таких материалах описывается уравнениями, содержащими тензор теплопроводности.

В данной статье такая ОЗТ рассматривается как задача идентификации зависящего от температуры тензора теплопроводности с известной теплоемкостью и граничными условиями на границе исследуемого объекта. В работах [1–5] приведены классификации ОЗТ и рассмотрены методы их решения. При этом в [2–5] задачи по идентификации коэффициента теплопроводности и теплоемкости называют коэффициентными ОЗТ, а мы, следуя классификации, данной в [1], все задачи по идентификации теплофизических характеристик внутри исследуемого объекта относим к классу внутренних ОЗТ по аналогии с внешними ОЗТ по идентификации тепловых потоков и других тепловых характеристик на поверхности объекта. В [6] приведено решение ОЗТ в анизотропном полупространстве на основе аналитического решения, полученного в работе [7].

Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Международная.
© Ю. М. Мацевитый, В. В. Ганчин, 2021

Автором [8] методом сопряженных градиентов определяется тензор нелинейных компонентов теплопроводности в прямоугольной пластине и для примера решена обратная задача по восстановлению тензора теплопроводности углеродного композитного материала, армированного непрерывными волокнами под углом 30° к одной из границ пластины. В монографии [5] приведены подходы к решению прямых и обратных задач теплопроводности анизотропных сред. В частности, для идентификации нелинейного тензора теплопроводности применяются методы градиентного спуска.

В данной статье методика, описанная в работе [9], для определения изотропного коэффициента теплопроводности, применяется для идентификации тензора теплопроводности относительно приращений искомых параметров, а поиск минимума данного функционала сводится к решению системы линейных уравнений относительно этих приращений.

Постановка задачи

Рассматривается внутренняя ОЗТ для двухмерной области по идентификации тензора теплопроводности. Тепловой процесс в теле из анизотропного материала описывается следующим образом:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$(R(T) + \alpha T) \Big|_{M \in \Gamma} = \alpha T_s, \quad (2)$$

$$T(M, \tau) \Big|_{\tau=0} = T_0, \quad (3)$$

где

$$R(T) = \left(\lambda_{xx}(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot \cos(\nu, x) + \left(\lambda_{yx}(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot \cos(\nu, y); \quad (4)$$

D – область пространства, занимаемая телом; $T=T(M, \tau)$ – температура тела; M – точка области D ; τ – временная координата; $\lambda_{xx}(T)$, $\lambda_{xy}(T)$, $\lambda_{yx}(T)$ и $\lambda_{yy}(T)$ – искомые компоненты тензора теплопроводности; $C(T)$ – объемная теплоемкость тела; α – коэффициент теплоотдачи поверхности Γ ; T_s – заданная температура среды; ν – внешняя нормаль к границе тела; T_0 – начальная температура.

Для решения внутренней обратной задачи теплопереноса в анизотропном теле задаются экспериментальные значения температур в зависимости от времени

$$T(x_k, y_k, \tau_l) = T_{lk}^{ex}, \quad l = \overline{1, n_\tau}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где n_τ – количество измерений по временной координате; m – количество точек измерений; (x_k, y_k) – точки области D , в которых измерена температура T_{lk}^{ex} . Ошибка измерений является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Нелинейные компоненты тензора теплопроводности выражаются через главные коэффициенты $\lambda_\xi(T)$, $\lambda_\eta(T)$ и угол ориентации φ главных осей $O\xi$ и $O\eta$ следующим образом [7]:

$$\lambda_{xx}(T) = \lambda_\xi(T) \cdot \cos^2 \varphi + \lambda_\eta(T) \cdot \sin^2 \varphi, \quad (6)$$

$$\lambda_{yy}(T) = \lambda_\eta(T) \cdot \cos^2 \varphi + \lambda_\xi(T) \cdot \sin^2 \varphi, \quad (7)$$

$$\lambda_{xy}(T) = \lambda_{yx}(T) = (\lambda_\xi(T) - \lambda_\eta(T)) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi. \quad (8)$$

Внутреннюю ОЗТ по идентификации тензора теплопроводности (1)–(5) с использованием соотношений (6)–(8) можно формализовать в виде

$$A[\lambda_\xi(T), \lambda_\eta(T), \varphi] = T^{ex},$$

где $\lambda_\xi(T)$ и $\lambda_\eta(T)$ – главные коэффициенты, зависящие от температуры; φ – угол ориентации главных осей $O\xi$ и $O\eta$; T^{ex} – температура, которая в большинстве случаев известна из эксперимента (исходные данные); A – оператор, связывающий искомые зависимости $\lambda_\xi(T)$, $\lambda_\eta(T)$ и φ с исходными данными T^{ex} . В такой постановке для идентификации тензора теплопроводности достаточно определить главные коэффициенты $\lambda_\xi(T)$, $\lambda_\eta(T)$ и угол ориентации φ главных осей $O\xi$ и $O\eta$.

Такая задача, как и любая другая ОЗТ, ввиду нарушения причинно-следственных связей некорректна по Адамару, что является причиной неустойчивости получаемого решения. Для решения такой задачи её либо сводят к условно-корректной, либо оставляют некорректной, но применяют один из методов регуляризации [2–5]. Здесь используется метод регуляризации А. Н. Тихонова [4].

Ниже рассматривается методика решения поставленной задачи.

Регуляризирующий алгоритм решения внутренней ОЗТ по идентификации тензора теплопроводности

Для решения нелинейной внутренней ОЗТ по идентификации тензора теплопроводности (1)–(8) используется принцип регуляризации А. Н. Тихонова, который сводится к минимизации следующего функционала:

$$J = \int_0^{\tau_0} \int_D [T(x, y, \tau) - T^{ex}(x, y, \tau)]^2 dx dy d\tau + \beta \cdot \Omega[\lambda_\xi(T), \lambda_\eta(T), \varphi], \quad (9)$$

где $T(x, y, \tau)$ – температура, получаемая в процессе решения внутренней обратной задачи теплопроводности; $T^{ex}(x, y, \tau)$ – экспериментально полученная температура; τ_0 – момент окончания анализа теплового процесса; β – параметр регуляризации; $\Omega[\lambda_\xi(T), \lambda_\eta(T), \varphi]$ – стабилизирующий функционал.

Если искомые функции $\lambda_\xi(T)$ и $\lambda_\eta(T)$ представить в виде

$$\lambda_\xi(T) = \sum_{k=1}^{n_\xi} \xi_k B_{\xi 3}^k(T), \quad (10)$$

$$\lambda_\eta(T) = \sum_{k=1}^{n_\eta} \eta_k B_{\eta 3}^k(T), \quad (11)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_\xi}) = \overrightarrow{\Phi}_\xi$ и $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_\eta}) = \overrightarrow{\Phi}_\eta$ – векторы искомых параметров, а $B_{\xi 3}^k(T)$ и $B_{\eta 3}^k(T)$ – кубические сплайны Шёнберга, то идентификация тензора теплопроводности сведется к определению неизвестных векторов $\overrightarrow{\Phi}_\xi$ и $\overrightarrow{\Phi}_\eta$, а также угла ориентации φ главных осей $O\xi$ и $O\eta$.

Минимизация функционала (9) проводится итерационным методом [9–11]. Поскольку температура $T(x, y, \tau)$ зависит от векторов $\overrightarrow{\Phi}_\xi$, $\overrightarrow{\Phi}_\eta$ и угла ориентации φ главных осей $O\xi$ и $O\eta$, её на $(p+1)$ -й итерации можно записать, используя ряд Тейлора, следующим образом:

$$T^{p+1}(x, y, \tau, \lambda_\xi^{p+1}, \lambda_\eta^{p+1}, \varphi^{p+1}) \approx T^p(x, y, \tau, \lambda_\xi^p, \lambda_\eta^p, \varphi^p) + \sum_{k=1}^{n_\xi} \frac{\partial T^p}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k^{p+1} + \sum_{k=1}^{n_\eta} \frac{\partial T^p}{\partial \eta_k} \Delta \eta_k^{p+1} + \frac{\partial T^p}{\partial \varphi} \Delta \varphi^{p+1}, \quad (12)$$

где $(\Delta \xi_1^{p+1}, \Delta \xi_2^{p+1}, \dots, \Delta \xi_{n_\xi}^{p+1}) = \Delta \overrightarrow{\Phi}_\xi^{p+1}$ и $(\Delta \eta_1^{p+1}, \Delta \eta_2^{p+1}, \dots, \Delta \eta_{n_\eta}^{p+1}) = \Delta \overrightarrow{\Phi}_\eta^{p+1}$ – векторы приращений $\Delta \overrightarrow{\Phi}_\xi^{p+1} = \overrightarrow{\Phi}_\xi^{p+1} - \overrightarrow{\Phi}_\xi^p$, $\Delta \overrightarrow{\Phi}_\eta^{p+1} = \overrightarrow{\Phi}_\eta^{p+1} - \overrightarrow{\Phi}_\eta^p$, а приращение угла ориентации $\Delta \varphi^{p+1} = \varphi^{p+1} - \varphi^p$.

На $(p+1)$ -й итерации стабилизирующий функционал представляется в виде

$$\Omega[\lambda_\xi^{p+1}(T), \lambda_\eta^{p+1}(T), \varphi^{p+1}] = \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \left(w_{0\xi} (\lambda_\xi^{p+1})^2 + w_{1\xi} \left(\frac{\partial \lambda_\xi^{p+1}}{\partial T} \right)^2 + w_{2\xi} \left(\frac{\partial^2 \lambda_\xi^{p+1}}{\partial T^2} \right)^2 \right) dT + \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \left(w_{0\eta} (\lambda_\eta^{p+1})^2 + w_{1\eta} \left(\frac{\partial \lambda_\eta^{p+1}}{\partial T} \right)^2 + w_{2\eta} \left(\frac{\partial^2 \lambda_\eta^{p+1}}{\partial T^2} \right)^2 \right) dT + w_\varphi \cdot (\varphi^{p+1})^2, \quad (13)$$

где $w_{0\xi}, w_{1\xi}, w_{2\xi}, w_{0\eta}, w_{1\eta}, w_{2\eta}, w_\varphi$ – весовые множители, которые выбираются с использованием априорной информации об искомых зависимостях $\lambda_\xi(T)$, $\lambda_\eta(T)$ и φ . В данной задаче для определения искомых зависимостей $\lambda_\xi(T)$, $\lambda_\eta(T)$ использовалась регуляризация второго порядка, а для φ – нулевого порядка [5].

Если подставить выражения (9), (10), (11) и (12) в функционал (8) и использовать необходимое условие минимума функционала (8), то можно получить систему линейных уравнений относительно $\Delta\xi_1^{p+1}, \dots, \Delta\xi_{n_\xi}^{p+1}, \Delta\eta_1^{p+1}, \dots, \Delta\eta_{n_\eta}^{p+1}, \Delta\varphi^{p+1}$ на $(p+1)$ -й итерации. Элементы системы линейных уравнений могут быть получены аналогично тому, как определялись элементы системы линейных уравнений в работе [10].

В эту систему входит параметр регуляризации β , который определяется, как мы это делали в работах [9, 10, 12, 13], исходя из условия

$$\left(1 - \sqrt{\frac{2}{N}}\right)\sigma \leq \delta \leq \left(1 + \sqrt{\frac{2}{N}}\right)\sigma, \quad (14)$$

которое было предложено в [4]. Здесь N – общее количество термометрических измерений; σ – среднеквадратическая ошибка измерения; δ – среднеквадратическое отклонение полученной температуры от измеренной.

Считается, что параметр регуляризации выбран правильно, если для полученного решения по предложенной выше итерационной схеме выполняется двухстороннее неравенство (14).

Численный эксперимент

Рассматривалась для нагретой конвективным тепловым потоком анизотропной прямоугольной пластины $l_x \times l_y$ внутренняя ОЗТ по идентификации тензора теплопроводности $\lambda_{xx}(T), \lambda_{xy}(T), \lambda_{yx}(T), \lambda_{yy}(T)$

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad x \in (0, l_x), y \in (0, l_y), \quad (15)$$

$$R(T)|_{(x=0) \cup (y=0)} = 0, \quad (16)$$

$$(R(T) + \alpha T)|_{(x=l_x) \cup (y=l_y)} = \alpha T_s,$$

где $R(T)$ – оператор в виде (4). Как и в работе [8], для идентификации тензора теплопроводности взяты 9 точек (обоснование минимального количества точек для идентификации тензора теплопроводности в двумерных областях проводится тоже в статье [8]). В данном тестовом численном эксперименте точки выбраны в углах пластины, на середине каждой из её внешних сторон и в её центре.

При проведении численного эксперимента в качестве зависящих от температуры главных коэффициентов теплопроводности были взяты функции

$$\lambda_\xi(T) = 1 + 0,5 \cdot T - T^2, \quad (17)$$

$$\lambda_\eta(T) = 0,5 - 0,5 \cdot T + 2 \cdot T^2, \quad (18)$$

которые достаточно точно аппроксимируются кубическими сплайнами Шёнберга с небольшим количеством искомых параметров. В качестве угла ориентации главных осей $O\xi$ и $O\eta$ взят угол в 30° . На полученное численное решение в точках термометрирования наложена случайная ошибка, распределенная по нормальному закону при $\sigma=0,02$.

После подстановки выражений (17) и (18) в (6)–(8) и при $\varphi=30^\circ$ получены выражения

$$\lambda_{xx}(T) = 0,875 + 0,25 \cdot T - 0,25 \cdot T^2, \quad (19)$$

$$\lambda_{yy}(T) = 0,625 - 0,25 \cdot T + 1,25 \cdot T^2, \quad (20)$$

$$\lambda_{xy}(T) = \lambda_{yx}(T) = 0,4330127019 \cdot (0,5 + T - 3 \cdot T^2). \quad (21)$$

На рис. 1–5 представлены зависимости главных коэффициентов теплопроводности $\lambda_\xi(T)$ и $\lambda_\eta(T)$, полученные с помощью описанного выше метода, а также зависимости тензора теплопроводности $\lambda_{xx}(T), \lambda_{xy}(T), \lambda_{yx}(T), \lambda_{yy}(T)$, которые сравниваются с зависимостями в виде (17)–(21) для следующих безразмерных величин: $n_\tau=100; m=9; \Delta\tau=0,01; l_x=1; l_y=1; \alpha=5; T_s=1; T_0=0; n_\xi=4; n_\eta=4; w_{0\xi}=0; w_{1\xi}=0; w_{2\xi}=1; w_{0\eta}=0; w_{1\eta}=0; w_{2\eta}=1; w_\varphi=1; C(T)=1$. Что касается угла ориентации, то он равен $29,87^\circ$.

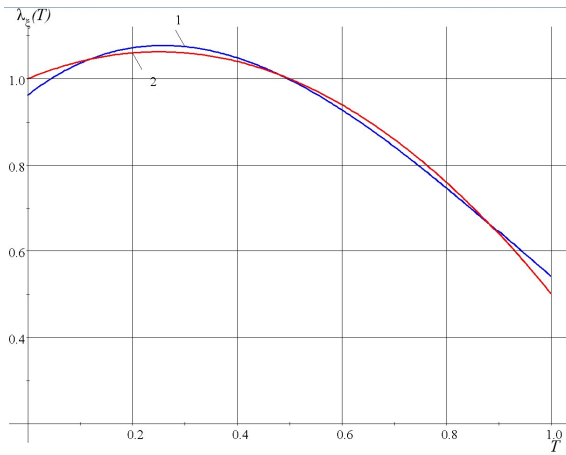


Рис. 1. Зависимости главного коэффициента $\lambda_{\zeta}(T)$:
1 – в виде (17); 2 – полученная итерационным методом

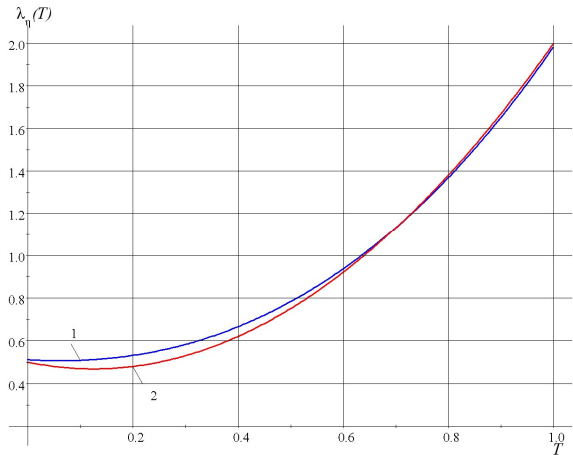


Рис. 2. Зависимости главного коэффициента $\lambda_{\eta}(T)$:
1 – в виде (18); 2 – полученная итерационным методом

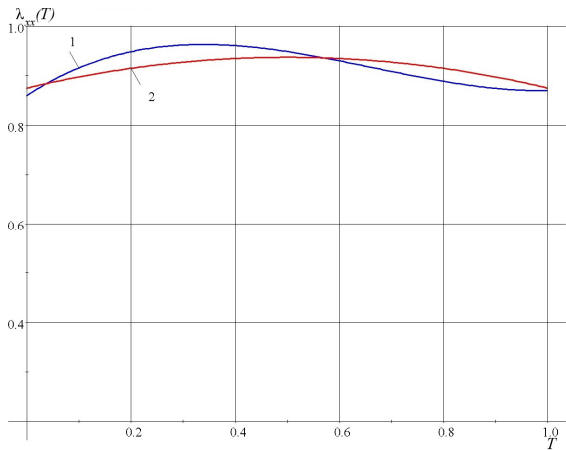


Рис. 3. Зависимости коэффициента $\lambda_{xx}(T)$:
1 – в виде (19); 2 – полученная итерационным методом

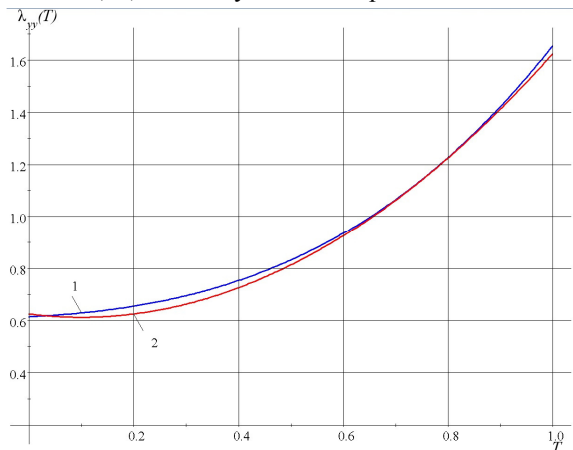


Рис. 4. Зависимости коэффициента $\lambda_{yy}(T)$:
1 – в виде (20); 2 – полученная итерационным методом

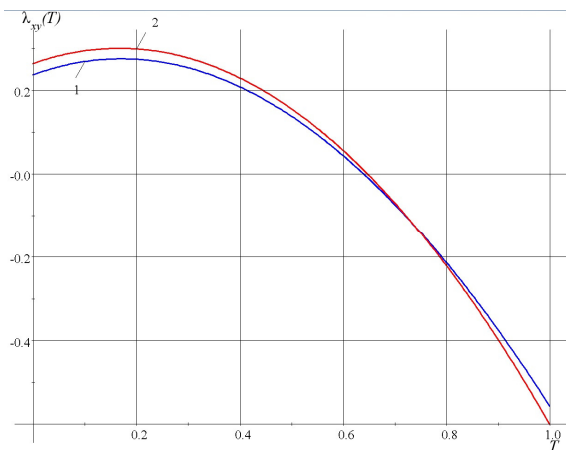


Рис. 5. Зависимости коэффициента $\lambda_{xy}(T)$ и $\lambda_{yx}(T)$:
1 – в виде (21); 2 – полученная итерационным методом

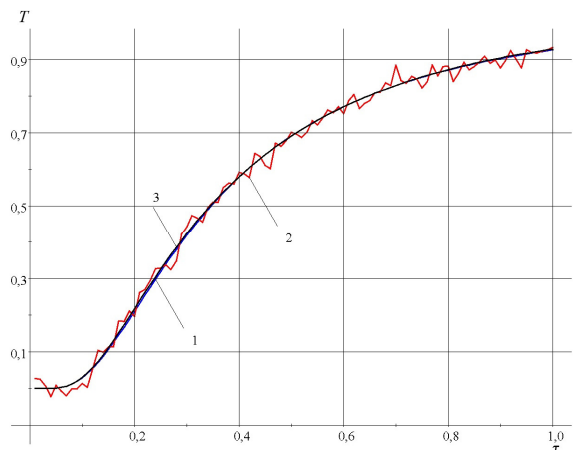


Рис. 6. Зависимости $T(\tau)$ в точке термометрирования $(x, y)=(0, 0)$ пластины:
1 – полученная с использованием коэффициентов в тензоре теплопроводности в виде (19–21);
2 – «зашумленное» решение прямой задачи;
3 – полученная итерационным методом

На рис. 6 представлены зависимости $T(\tau)$ в точке термометрирования $(x, y)=(0, 0)$ пластины, полученные в результате решения прямой и обратной задач, «зашумленная» температура в этой точке, а также температура, полученная с использованием идентифицированных главных коэффициентов теплопроводности и угла ориентации главных осей.

Подбор параметра регуляризации β начинался с $\beta=0,01$. Итерационный процесс подбора β после трех итераций закончился на $\beta=0,0001$ при достижении среднеквадратичной ошибки $\delta \approx 0,0199$. Все краевые задачи по определению поля температур в исследуемом объекте решались с применением метода конечных элементов (МКЭ) и неявной разностной схемы.

С использованием предложенной методики решена также задача, представленная в работе [8], где в прямоугольной пластине $l_x \times l_y$ восстанавливаются нелинейные компоненты тензора теплопроводности углеродного композитного материала, армированного непрерывными волокнами под углом $\varphi=30^\circ$ к одной из границ пластины. При этом использовались: уравнение (15), начальное условие (3), граничное условие

$$T|_{(x=0) \cup (y=0) \cup (x=l_x) \cup (y=l_y)} = T_s \quad (22)$$

и экспериментальные данные (5) в девяти точках.

Для численного эксперимента, как и в работе [8], главные компоненты тензора теплопроводности взяты в следующем виде:

$$\lambda_\xi(T) = -5,0625 + 0,625 \cdot 10^{-2} \cdot T + 0,46875 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 \quad \text{Вт/(м·К)}, \quad (23)$$

$$\lambda_\eta(T) = -4,25 + 0,0125 \cdot T - 0,625 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 \quad \text{Вт/(м·К)}. \quad (24)$$

Прямая задача (15), (16), (22) с главными компонентами тензора теплопроводности (23), (24) и углом ориентации главных компонентов тензора теплопроводности $\varphi=30^\circ$ к одной из границ пластины решалась при: $T_s=1400$ К; $T_0=600$ К; $C=2,25 \times 10^6$ Дж/(м³·К); $l_x=0,1$ м; $l_y=0,06$ м. Экспериментальные значения температур определялись в точках $\{(x_i, y_i)\}$, $i=1,3$; $j=1,3$, где $x_i=\{0,01$ м; $0,05$ м; $0,09$ м}, $y_i=\{0,004$ м; $0,012$ м; $0,02$ м} в моменты времени $\{t_k=k \cdot \Delta t\}$, $k=1,40$ с $\Delta t=5$ с. При решении ОЗТ на экспериментальные значения температур накладывалась случайная ошибка, распределенная по нормальному закону распределения с $\sigma=5$ К.

На рис. 7–8 представлены идентифицированные зависимости главных коэффициентов теплопроводности $\lambda_\xi(T)$ и $\lambda_\eta(T)$, полученные с помощью описанного выше метода, которые сравниваются с их зависимостями в виде (23)–(24) для $n_\xi=4$; $n_\eta=4$; $w_{0\xi}=0$; $w_{1\xi}=0$; $w_{2\xi}=1$; $w_{0\eta}=0$; $w_{1\eta}=0$; $w_{2\eta}=1$; $w_\varphi=1$. Идентификация угла ориентации сошлась к значению $31,27^\circ$.

Подбор параметра регуляризации β начинался с $\beta=4 \times 10^4$. Итерационный процесс подбора β после пяти итераций закончился на $\beta=1,25 \times 10^3$ при достижении среднеквадратичной ошибки $\delta \approx 5,1385$. Все краевые задачи по определению поля температур в исследуемом объекте решались с применением МКЭ и неявной разностной схемы.

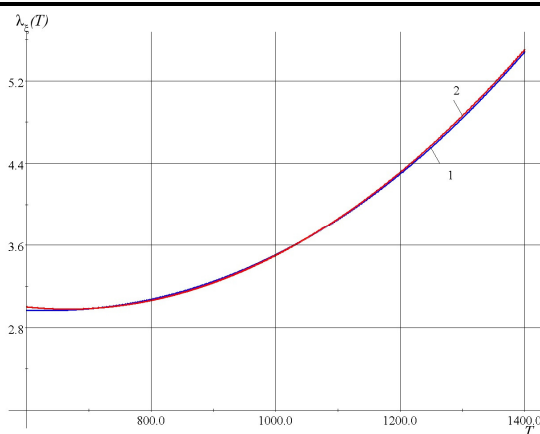


Рис. 7. Зависимости главного коэффициента $\lambda_\xi(T)$: 1 – в виде (24); 2 – полученная итерационным методом

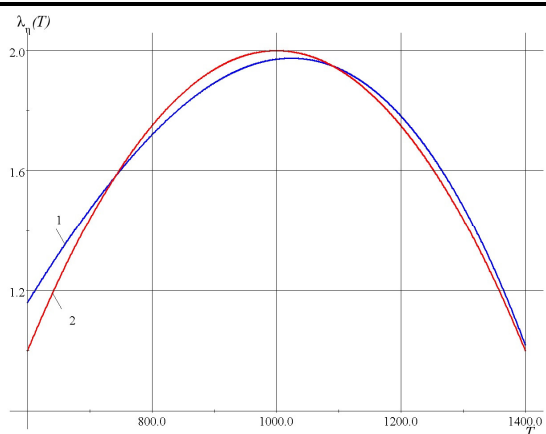


Рис. 8. Зависимости главного коэффициента $\lambda_\eta(T)$: 1 – в виде (25); 2 – полученная итерационным методом

Выводы

Приведенное решение нелинейных двухмерных внутренних ОЗТ по идентификации тензора теплопроводности свидетельствует о том, что представленная методика идентификации может быть успешно использована при наличии априорной информации об искомой функции. Если же таковая информация отсутствует, то предложенный подход тоже может быть применен, но при этом ошибки измерений должны быть сопоставимы с ошибками решения прямой задачи. Предлагаемая в данной статье методика по идентификации нелинейного тензора теплопроводности дает сопоставимые результаты с известными методами, а при использовании априорной информации о гладкости компонентов тензора эффективность ее применения даже выше [8].

Представленные в статье исследования выполнены в рамках бюджетной темы III-6-20.

Литература

1. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Т. 1: Методология. Киев: Наук. думка, 2002. 408 с.
2. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.) Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
5. Формалев В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
6. Кузнецова Е. Л. Восстановление характеристик тензора теплопроводности на основе аналитического решения задачи теплопереноса в анизотропном полупространстве. *Теплофизика высоких температур*. 2011. Т. 49. № 6. С. 1–8.
7. Формалёв В. Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор. *Теплофизика высоких температур*. 2001. Т. 39. № 5. С. 810–832.
8. Колесник С. А. Метод численного решения обратных нелинейных задач по восстановлению компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов. *Вычисл. технологии*. 2013. Т. 18. № 1. С. 34–44.
9. Matsevytyi Yu. M., Hanchyn V. V. Multiparametric identification of several thermophysical characteristics by solving the internal inverse heat conduction problem. *J. Mech. Eng. – Problemy Mashynobuduvannia*. 2020. Vol. 23. No. 2. P. 14–20. <https://doi.org/10.15407/pmach2020.02.014>.
10. Matsevytyi Yu. M., Hanchyn V. V. To the solution of geometric inverse heat conduction problems. *J. Mech. Eng. – Problemy Mashynobuduvannia*. 2021. Vol. 24. No. 1. P. 6–12. <https://doi.org/10.15407/pmach2021.01.006>.
11. Круковский П. Г. Обратные задачи тепломассопереноса (общий инженерный подход). Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 1998. 224 с.
12. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Ганчин В. В. Регионально-аналитическое моделирование и идентификация тепловых потоков с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. *Пробл. машиностроения*. 1999. Т. 2. № 1–2. С. 34–42.
13. Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности. *Пробл. машиностроения*. 2016. Т. 19. № 1. С. 28–36. <https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.028>.

Поступила в редакцию 29.03.2021

Розв'язання оберненої задачі з ідентифікації тензора теплопровідності в анізотропних матеріалах

Ю. М. Мацевитий, В. В. Ганчин

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

На основі теорії регуляризації А. М. Тихонова розроблено методику розв'язання обернених задач теплопровідності з ідентифікації тензора теплопровідності двовимірної області. Ці задачі замінюються на задачі з ідентифікації головних коефіцієнтів та кута орієнтації головних осей, а головні коефіцієнти апроксимуються кубічними сплайнами Шьонберга. В результаті задача зводиться до визначення невідомих коефіцієнтів в цих апроксимаціях і кута орієнтації головних осей. За відомих граничних і початкових умов температура в області буде

залежати тільки від цих коефіцієнтів і кута орієнтації. Якщо виразити її за формулою Тейлора для двох членів ряду і підставити в функціонал Тихонова, то визначення збільшень коефіцієнтів і збільшення кута орієнтації можна звести до розв'язання системи лінійних рівнянь щодо цих збільшень. Вибравши певний параметр регуляризації і деякі функції для головних коефіцієнтів теплопровідності і кута орієнтації як початкове наближення, можна реалізувати ітераційний процес визначення цих коефіцієнтів. Отримавши вектори коефіцієнтів і кут орієнтації в результаті збігального ітераційного процесу, можна визначити середньоквадратичну нев'язку між одержуваною температурою і температурою, яка вимірюється в результаті проведеного експерименту. Залишається підібрати параметр регуляризації таким чином, щоб ця нев'язка була в межах середньоквадратичної похибки помилки вимірювань. Під час перевірки ефективності використання запропонованого методу розв'язано ряд двомірних тестових задач для тіл з відомими тензорами теплопровідності. Проаналізовано вплив випадкових похибок вимірювань на похибка ідентифікації тензора теплопровідності.

Ключові слова: внутрішня обернена задача теплопровідності, тензор теплопровідності, метод регуляризації А. М. Тихонова, стабілізуючий функціонал, параметр регуляризації, ідентифікація, апроксимація, кубічні сплайни Шьонберга.