

УДК 539.43

БІФУРКАЦІЇ ТА СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ТРИШАРОВОЇ КОМПЗИТНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОМІРНИМИ АМПЛІТУДАМИ

¹ **К. В. Аврамов**, д-р техн. наук

kvavramov@gmail.com

ORCID: 0000-0002-8740-693X

¹ **Б. В. Успенський**, канд. техн. наук

Uspensky.kubes@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6360-7430

² **І. А. Урняєва**, доктор філософії

inna.urniaieva@nure.ua

ORCID: 0000-0001-9795-6954

³ **І. Д. Бреславський**, канд. техн. наук

ORCID: 0000-0002-9666-9731

¹ Інститут проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10

² Харківський національний
університет радіоелектроніки,
61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 14

³ Університет Макгілла,
Канада QC H3A 0C3, Montreal, 817 Rue Sherbrooke
O #270

Вступ

Багатошарові конструкції добре себе зарекомендували в аерокосмічній техніці, де вони використовуються понад 70 років. Це пояснюється передусім тим, що дані конструкції мають велику жорсткість на вигин при малій вазі. Крім того, такі їх частини, як стільникові заповнювачі, виготовляються за допомогою адитивних технологій [1, 2], що має низку переваг. Наприклад, ці технології дозволяють виробляти деталі із внутрішніми порожнинами, що суттєво полегшує конструкцію. Враховуючи це, адитивні технології використовуються і для виготовлення деталей літальних апаратів [3, 4].

Беручи до уваги усе сказане вище, до вивчення багатошарових конструкцій із стільниковим заповнювачем докладено багато зусиль. Було встановлено, що рівняння у частинних похідних вільних коливань кінчної оболонки виводяться шляхом використання варіаційних методів [5]. За допомогою теорії Міндліна чисельно досліджується композитна тришарова конструкція [6]. Зсувна теорія високого порядку Фростигом із співавторами [7] застосовується для аналізу багатошарових балок із пружним заповнювачем, а Малекзадехом зі співавторами – для аналізу коливань багатошарових пластин з в'язкопружним заповнювачем [8]. Вільні лінійні коливання багатошарових панелей з податливим заповнювачем розглядаються у [9]. Перехідні процеси в багатошаровій панелі аналізуються шляхом використання ефективного міжшарового формулювання задачі [10].

Авторами виведено математичну модель геометрично нелінійних коливань тришарових оболонок, яка описує коливання конструкції з амплітудами, порівняними з її товщиною. При виведенні цієї моделі використовується теорія зсуву високого порядку. Інерція обертання також враховується. При цьому середній шар є стільниковим заповнювачем, виготовленим завдяки адитивним технологіям FDM. Крім того, кожен шар оболонки описується п'ятьма змінними (трьома проєкціями переміщень і двома кутами повороту нормалі до серединної поверхні). Загальна кількість невідомих змінних дорівнює п'ятнадцяти. Для отримання моделі нелінійних коливань конструкції використано метод заданих форм. Виведено потенційну енергію, яка враховує квадратичні, кубічні й четверті степені узагальнених переміщень конструкції. Всі узагальнені переміщення розкладаються за узагальненими координатами і власними формами, які визнаються базовими функціями. Доведено, що математична модель коливань оболонки є системою нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Для дослідження нелінійних періодичних коливань та їх біфуркацій застосовується чисельна процедура, яка є поєднанням методу продовження і методу пристрілювання. Метод пристрілювання враховує умови періодичності, що виражаються системою нелінійних рівнянь алгебри щодо початкових умов періодичних коливань. Ці рівняння розв'язуються з використанням методу Ньютона. Чисельно досліджено властивості нелінійних періодичних коливань та їх біфуркацій в областях субгармонічних резонансів. Виявлено стійкі субгармонічні коливання другого порядку, які зазнають сідло-вузлової біфуркації. Нескінченної послідовності біфуркацій, що призводить до хаотичних коливань, не виявлено.

Ключові слова: оболонка подвійної кривизни, адитивні технології, стільниковий заповнювач, біфуркаційна поведінка.

Автори статті вивчали багат шарові конструкції, а основною новизною роботи слід визнати результати чисельного моделювання біфуркацій нелінійних вимушених коливань в області субгармонічних резонансів тришарових оболонок подвійної кривизни із стільниковим заповнювачем, виготовленим за допомогою адитивних технологій FDM. Для досягнення цієї мети побудовано нову математичну модель геометрично нелінійного динамічного деформування тришарових оболонок подвійної кривизни, яка застосовує зсувну теорію високого порядку. Напружений стан кожного шару оболонки описується п'ятьма параметрами (трьома проєкціями переміщень і двома кутами повороту нормалі до серединної поверхні). За допомогою методу заданих форм вказана математична модель зводиться до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Біфуркації періодичних коливань отриманої динамічної системи досліджуються чисельним методом, що є поєднанням методу продовження і методу пристрілювання.

Постановка задачі та основні рівняння

Об'єктом вивчення обрано тришарову оболонку подвійної кривизни (рис. 1). Верхній та нижній її шари виготовлені з вуглепластику, а середній – стільниковий заповнювач, виготовлений за допомогою FDM технології з матеріалу ULTEM 9085. Верхній, середній і нижній шари оболонки мають постійні товщини h_t, h_c, h_b . Деформування конструкції розглядається у криволінійних координатах (x, y) . Радіуси кривизн цих координатних ліній позначаються через R_1 і R_2 . Вісь z спрямована перпендикулярно до осей x, y (рис. 1). Використовуємо три поперечні координати z_t, z_c, z_b , пов'язані з трьома серединними поверхнями шарів. Довжини двох викривлених сторін оболонки a і b (рис. 1). Основні геометричні параметри стільників (рис. 1) наступні: l_1, l_2, h_c, ψ , де h_c – товщина стільникового заповнювача.

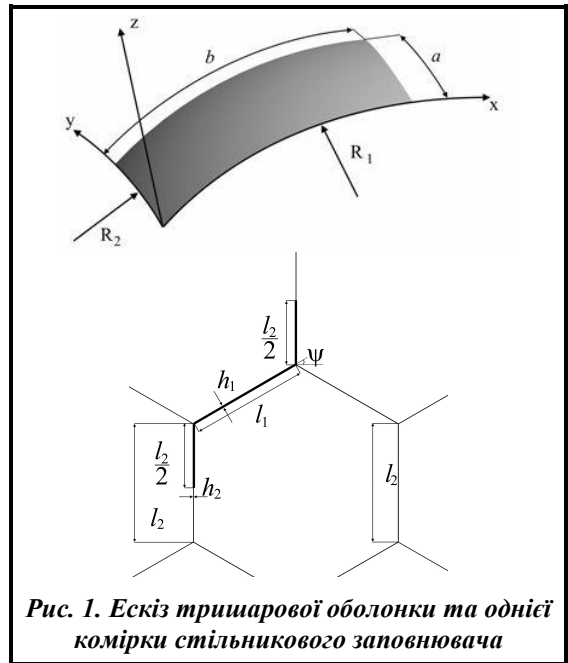


Рис. 1. Ескіз тришарової оболонки та однієї комірки стільникового заповнювача

Оболонка здійснює вимушені коливання під впливом періодичної зосередженої сили $F_0 \cos(\Omega t)$, величина якої така, що амплітуди коливань оболонки можна порівняти з її товщиною. Тому оболонка зазнає геометрично нелінійного деформування, що буде розглянуто нижче.

Напружено-деформований стан конструкції описується проєкціями переміщень точок кожного шару на координатні осі (x, y, z) : $u_1^{(t)}, u_2^{(t)}, u_3^{(t)}, u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, u_3^{(c)}, u_1^{(b)}, u_2^{(b)}, u_3^{(b)}$.

Верхній та нижній шари оболонки є ортотропними. Вони задовольняють закону Гука у такій формі:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(j)} \\ \sigma_{yy}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(j)} \\ \varepsilon_{yy}^{(j)} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{xy}^{(j)} = 2\bar{C}_{66}\varepsilon_{xy}^{(j)}; \quad \sigma_{xz}^{(j)} = 2\bar{C}_{55}\varepsilon_{xz}^{(j)}; \quad \sigma_{yz}^{(j)} = 2\bar{C}_{44}\varepsilon_{yz}^{(j)}; \quad j= b, t, \tag{1}$$

де $\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}, \sigma_{xz}^{(j)}, \sigma_{yz}^{(j)}, \varepsilon_{xx}^{(j)}, \varepsilon_{yy}^{(j)}, \varepsilon_{xy}^{(j)}, \varepsilon_{xz}^{(j)}, \varepsilon_{yz}^{(j)}$ – елементи тензорів напружень і деформацій.

Стільниковий заповнювач трансформується в еквівалентне ортотропне середовище за допомогою гомогенізації стільників [11]. У цій статті не розглядається розрахунок параметрів гомогенізованого середовища. Внаслідок такого моделювання розраховується матриця закону Гука

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{yy}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{yy}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \end{bmatrix};$$

$$\sigma_{yz}^{(c)} = 2C_{44}\varepsilon_{yz}^{(c)}; \quad \sigma_{xz}^{(c)} = 2C_{55}\varepsilon_{xz}^{(c)}; \quad \sigma_{xy}^{(c)} = 2C_{66}\varepsilon_{xy}^{(c)}, \tag{2}$$

де $\sigma_{xx}^{(c)}, \sigma_{yy}^{(c)}, \sigma_{zz}^{(c)}, \sigma_{yz}^{(c)}, \sigma_{xz}^{(c)}, \sigma_{xy}^{(c)}, \varepsilon_{xx}^{(c)}, \varepsilon_{yy}^{(c)}, \varepsilon_{zz}^{(c)}, \varepsilon_{yz}^{(c)}, \varepsilon_{xz}^{(c)}, \varepsilon_{xy}^{(c)}$ – елементи тензора напружень і деформацій стільникового заповнювача.

Для опису стану оболонки, що деформується, скористаємося зсувною теорією високого порядку [12]. Переміщення точок верхніх і нижніх шарів оболонки у проєкціях на осі (x, y, z) представимо так:

$$u_1^{(i)} = u^{(i)} \left(1 + \frac{z_i}{R_1} \right) + z_i \phi_1^{(i)} + z_i^2 \phi_1^{(i)}; \quad u_2^{(i)} = v^{(i)} \left(1 + \frac{z_i}{R_2} \right) + z_i \phi_2^{(i)} + z_i^2 \phi_2^{(i)}; \quad u_3^{(i)} = w^{(i)}; \quad i=t, b, \quad (3)$$

де $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}$ – проєкції переміщень точок серединних поверхонь шарів на координатні осі (x, y, z_i) ; $i=t, b$; $\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні відповідного шару; $\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}$ – невідомі функції, що підлягають визначенню.

Поле переміщень гомогенізованого середнього шару представимо так:

$$u_1^{(c)} = u^{(c)} \left(1 + \frac{z_c}{R_1} \right) + z_c \phi_1^{(c)} + z_c^2 \phi_1^{(c)} + z_c^3 \gamma_1^{(c)}; \quad u_2^{(c)} = v^{(c)} \left(1 + \frac{z_c}{R_2} \right) + z_c \phi_2^{(c)} + z_c^2 \phi_2^{(c)} + z_c^3 \gamma_2^{(c)}; \\ u_3^{(c)} = w^{(c)} + z_c w_1^{(c)} + z_c^2 w_2^{(c)}, \quad (4)$$

де $u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}$ – проєкції переміщень точок серединної поверхні гомогенізованого шару; $\phi_1^{(c)}, \phi_2^{(c)}$ – кути повороту нормалі до серединної поверхні; $\phi_1^{(c)}, \phi_2^{(c)}, \gamma_1^{(c)}, \gamma_2^{(c)}$ – невідомі функції, що підлягають визначенню.

На верхніх і нижніх сторонах оболонки та на поверхнях між шарами виконуються наступні граничні умови й умови безперервності переміщень:

$$\varepsilon_{xz}^{(t)} \Big|_{z_i=0,5h_t} = \varepsilon_{yz}^{(t)} \Big|_{z_i=0,5h_t} = \varepsilon_{xz}^{(b)} \Big|_{z_i=-0,5h_b} = \varepsilon_{yz}^{(b)} \Big|_{z_i=-0,5h_b} = 0; \\ u_i^{(t)}(z_i = -0,5h_t) = u_i^{(c)}(z_c = 0,5h_c); \quad u_i^{(b)}(z_b = 0,5h_b) = u_i^{(c)}(z_c = -0,5h_c); \quad i=1, 2, 3. \quad (5)$$

Використовуючи умови (5), знайдено невідомі параметри розкладів (3, 4): $\phi_1^{(t)}, \phi_2^{(t)}, \phi_1^{(c)}, \phi_2^{(c)}, \gamma_1^{(c)}, w_1^{(c)}, w_2^{(c)}$.

Розглянемо защемлену через весь контур ∂D оболонку. Тоді граничні умови набувають такого вигляду:

$$u^{(i)} \Big|_{\partial D} = v^{(i)} \Big|_{\partial D} = w^{(i)} \Big|_{\partial D} = \phi_1^{(i)} \Big|_{\partial D} = \phi_2^{(i)} \Big|_{\partial D} = 0; \quad i=t, c, b. \quad (6)$$

Геометрично нелінійне деформування описується нелінійним зв'язком між деформаціями й переміщеннями. Загальний випадок таких співвідношень у криволінійних координатах представлений у монографії [13]. Ці співвідношення використовуються надалі. Розкладання переміщень (3, 4) введемо у ці нелінійні співвідношення. Отримаємо такі розкладання для елементів тензорів деформацій

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} = \varepsilon_{1,0}^{(i)} + z_i k_{1,0}^{(i)} + z_i^2 k_{1,1}^{(i)} + z_i^3 k_{1,2}^{(i)}; \quad \varepsilon_{yy}^{(i)} = \varepsilon_{2,0}^{(i)} + z_i k_{2,0}^{(i)} + z_i^2 k_{2,1}^{(i)} + z_i^3 k_{2,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_{xy}^{(i)} = \varepsilon_{12,0}^{(i)} + z_i k_{12,0}^{(i)} + z_i^2 k_{12,1}^{(i)} + z_i^3 k_{12,2}^{(i)}; \quad \varepsilon_{xz}^{(i)} = \varepsilon_{13,0}^{(i)} + z_i k_{13,0}^{(i)} + z_i^2 k_{13,1}^{(i)} + z_i^3 k_{13,2}^{(i)}; \\ \varepsilon_{yz}^{(i)} = \varepsilon_{23,0}^{(i)} + z_i k_{23,0}^{(i)} + z_i^2 k_{23,1}^{(i)} + z_i^3 k_{23,2}^{(i)}; \quad i=t, c, b; \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} = \varepsilon_{3,0}^{(c)} + z_c k_{3,0}^{(c)}. \quad (7)$$

Усі нелінійні доданки у співвідношеннях (7), що описують геометрично нелінійне деформування, зосереджені в доданках при нульовому степені z_i . Ці доданки описують деформування серединних поверхонь багат шарових оболонок. Усі інші доданки при ненульових степенях z_i лінійно залежать від проєкцій переміщень.

Потенційні енергії деформування двох лицьових шарів оболонки мають такий вигляд:

$$U_i = 0,5 \int_{V_i} \left(\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy}^{(i)} + \sigma_{xy}^{(i)} \varepsilon_{xy}^{(i)} + \sigma_{xz}^{(i)} \varepsilon_{xz}^{(i)} + \sigma_{yz}^{(i)} \varepsilon_{yz}^{(i)} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_i = \\ = \int_{V_i} \left(\bar{C}_{11} \varepsilon_{xx}^{(i)2} + \bar{C}_{22} \varepsilon_{yy}^{(i)2} + 2\bar{C}_{12} \varepsilon_{yy}^{(i)} \varepsilon_{xx}^{(i)} + 2\bar{C}_{66} \varepsilon_{xy}^{(i)2} + 2\bar{C}_{55} \varepsilon_{xz}^{(i)2} + 2\bar{C}_{44} \varepsilon_{yz}^{(i)2} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_i; \quad i=t, b, \quad (8)$$

де $\psi=x/R_1$; $\theta=y/R_2$; V_i – об'єм, який займає шар оболонки.

Тепер розглянемо потенційну енергію гомогенізованого шару, який відповідає закону Гука (2). Потенційну енергію представимо так:

$$\begin{aligned}
 U_c &= 0,5 \int_{V_c} \left(\sigma_{xx}^{(c)} \varepsilon_{xx}^{(c)} + \sigma_{yy}^{(c)} \varepsilon_{yy}^{(c)} + \sigma_{zz}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + \sigma_{xy}^{(c)} \varepsilon_{xy}^{(c)} + \sigma_{xz}^{(c)} \varepsilon_{xz}^{(c)} + \sigma_{yz}^{(c)} \varepsilon_{yz}^{(c)} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_c = \\
 &= 0,5 \int_{V_c} \left(C_{11} \varepsilon_{xx}^{(c)2} + C_{22} \varepsilon_{yy}^{(c)2} + 2C_{12} \varepsilon_{xx}^{(c)} \varepsilon_{yy}^{(c)} + 2C_{55} \varepsilon_{xy}^{(c)2} + 2C_{66} \varepsilon_{xz}^{(c)2} + 2C_{44} \varepsilon_{yz}^{(c)2} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_c + \\
 &\quad + 0,5 \int_{V_c} \left(C_{33} \varepsilon_{zz}^{(c)2} + 2C_{23} \varepsilon_{yy}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + 2C_{13} \varepsilon_{xx}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_c. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Кінетичні енергії шарів конструкції T_i представимо так:

$$T_i = 0,5 \int_{V_i} \rho_i \left(\dot{u}_1^{(i)2} + \dot{u}_2^{(i)2} + \dot{u}_3^{(i)2} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z_i}{R_2} \right) R_1 R_2 d\psi d\theta dz_i, \quad i=t, c, b, \quad (10)$$

де ρ_i – щільність матеріалу i -го шару; $\dot{u}_1^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t}$.

Рівняння вимушених нелінійних коливань

Вимушені нелінійні коливання оболонки розкладаються за формами лінійних коливань. Тому перед аналізом нелінійної системи надзвичайно важливо дослідити лінійні коливання. Для цього скористаємося способом Релея-Рітца [14]. Лінійні коливання оболонки представимо так:

$$\begin{bmatrix} u^{(i)} \\ v^{(i)} \\ w^{(i)} \\ \phi_1^{(i)} \\ \phi_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i(x, y) \\ V_i(x, y) \\ W_i(x, y) \\ X_i(x, y) \\ Y_i(x, y) \end{bmatrix} \cos(\omega t); \quad i=b, c, t, \quad (11)$$

де ω – частота лінійних коливань; $U_i(x, y), V_i(x, y), W_i(x, y), X_i(x, y), Y_i(x, y)$ – функції, що підлягають розрахунку, які задовольняють граничним умовам (6). Ці функції представимо у вигляді наступних розкладів:

$$\begin{aligned}
 U_i &= \sum_{\mu=1}^{N_i^{(u)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(u)}} A_{i\mu j}^{(u)} U_x^{(\mu)}(x) U_y^{(j)}(y); \quad V_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(v)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(v)}} A_{i\mu j}^{(v)} V_x^{(\mu)}(x) V_y^{(j)}(y); \quad W_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(w)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(w)}} A_{i\mu j}^{(w)} W_x^{(\mu)}(x) W_y^{(j)}(y); \\
 X_i &= \sum_{\mu=1}^{N_i^{(f)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(f)}} A_{i\mu j}^{(f)} F_x^{(\mu)}(x) F_y^{(j)}(y); \quad Y_i = \sum_{\mu=1}^{N_i^{(g)}} \sum_{j=1}^{L_i^{(g)}} A_{i\mu j}^{(g)} G_x^{(\mu)}(x) G_y^{(j)}(y), \quad (12)
 \end{aligned}$$

де $A = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{bN_b^{(g)} L_b^{(g)}})$ – вектор невідомих параметрів лінійних коливань, який представимо так:

$A = (A_1, A_2, \dots, A_{N_s})$; $U_x^{(1)}(x), U_x^{(2)}(x), \dots$ – базисні функції.

Потенційну енергію всієї конструкції запишемо так:

$$U_{\Sigma} = U_t + U_c + U_b. \quad (13)$$

Оскільки досліджуються лінійні коливання, то при розрахунку потенційної енергії нелінійні доданки щодо проєкцій переміщень у розкладанні (7) відкидаються. Кінетичну енергію композитної конструкції представимо так:

$$T_{\Sigma} = T_t + T_c + T_b. \quad (14)$$

Для аналізу лінійних коливань застосовується метод Релея-Рітца. За його допомогою приходимо до узагальненої проблеми власних значень, з якої встановлюються власні частоти і форми коливань.

Вимушені коливання конструкції збуджуються періодичною зосередженою силою, прикладеною у точці з координатами $x=x_0$; $y=y_0$. Цю силу представимо так:

$$F = F_0 \cos(\Omega t) \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (15)$$

де F_0 , Ω – амплітуда й частота збурювальної сили відповідно; $\delta(x-x_0, y-y_0)$ – дельта-функція.

Нелінійні коливання розкладемо за формами власних коливань. Ці розкладання представимо так:

$$w^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_w} q_{N_w(i-1)+j} W_{i,j}(x, y); \quad \phi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi_1}} q_{3N_w+N_{\phi_1}(i-1)+j} X_{i,j}(x, y); \quad \phi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{\phi_2}} q_{3N_w+3N_{\phi_1}+N_{\phi_2}(i-1)+j} Y_{i,j}(x, y);$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_u} q_{3N_w+3N_{\phi_1}+3N_{\phi_2}+N_u(i-1)+j} U_{i,j}(x, y); \quad v^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_v} q_{3N_w+3N_{\phi_1}+3N_{\phi_2}+3N_u+N_v(i-1)+j} V_{i,j}(x, y); \quad i=1, \dots, 3, \quad (16)$$

де $W_{i,j}$, $X_{i,j}$, $Y_{i,j}$, $U_{i,j}$, $V_{i,j}$ – власні форми коливань; i – номер шару; j – номер власної форми; $q=(q_1, \dots, q_{N^*})$ – вектор узагальнених координат.

Для отримання узагальнених сил запишемо роботу $\delta A = - \int_D F \delta w^{(1)} dx dy$. Узагальнена сила O_j ,

що відповідає узагальненій координаті q_j ; $j=1, \dots, N_w$, набуває наступного вигляду $Q_j = H_j \cos(\Omega t)$, де $H_j = -F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)$.

Розкладання (16) вводяться у кінетичну й потенційну енергії (8–10). Тоді кінетична енергія подається у вигляді квадратичної форми щодо узагальнених швидкостей $T_\Sigma = T_\Sigma(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N^*})$. Потенційну енергію можна представити так:

$$U_\Sigma = U_\Sigma^{(2)}(q_1, \dots, q_{N^*}) + U_\Sigma^{(3)}(q_1, \dots, q_{N^*}) + U_\Sigma^{(4)}(q_1, \dots, q_{N^*}), \quad (17)$$

де $U_\Sigma^{(2)}(q_1, \dots, q_{N^*})$ – квадратичні доданки до вектора узагальнених координат; $U_\Sigma^{(3)}(q_1, \dots, q_{N^*})$ – кубічні доданки до вектора узагальнених координат; $U_\Sigma^{(4)}(q_1, \dots, q_{N^*})$ – доданки четвертого степеня до вектора узагальнених координат.

Кінетичну й потенційну енергії конструкції введемо до рівнянь Лагранжа. Тоді рівняння руху конструкції набувають наступного матричного вигляду:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_1^{(2)}(q_1, q_2) + \mathfrak{R}_1^{(3)}(q_1, q_2) \\ \mathfrak{R}_2^{(2)}(q_1, q_2) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(q_1, q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t), \quad (18)$$

де $H=[H_1, \dots, H_{N_w}, 0, 0, \dots]$; $\mathfrak{R}_1^{(2)}(q_1, q_2)$, $\mathfrak{R}_2^{(2)}(q_1, q_2)$ – вектор-функції квадратичних поліномів щодо узагальнених координат; $\mathfrak{R}_1^{(3)}(q_1, q_2)$, $\mathfrak{R}_2^{(3)}(q_1, q_2)$ – вектор-функції кубічних поліномів.

З огляду на те, що лицьові шари тришарової оболонки дуже тонкі, а щільність гомогенізованої моделі стільникового заповнювача надзвичайно мала, всі елементи матриць M_{12} , M_{22} , M_{21} близькі до нуля. У подальшому аналізі ці доданки приймаються нульовими. Тоді динамічну систему (18) представимо так:

$$M_{11} \ddot{q}_1 + K_{11} q_1 + K_{12} q_2 + \mathfrak{R}_1^{(2)}(q_1, q_2) + \mathfrak{R}_1^{(3)}(q_1, q_2) = H \cos(\Omega t);$$

$$K_{21} q_1 + K_{22} q_2 + \mathfrak{R}_2^{(2)}(q_1, q_2) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(q_1, q_2) = 0. \quad (19)$$

Розглянемо друге матричне рівняння. На першому етапі відкинемо нелінійні доданки й запишемо його рішення так:

$$q_2 = R q_1; \quad R = -K_{22}^{-1} K_{21}.$$

Рішення (19) введемо до другого рівняння (18). Отримані співвідношення представимо так:

$$q_2 = R q_1 - K_{22}^{-1} [\mathfrak{R}_2^{(2)}(q_1, R q_1) + \mathfrak{R}_2^{(3)}(q_1, R q_1)]. \quad (20)$$

Рівняння (20) вводиться у перше матричне рівняння (18). У результаті отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{N_1} m_{ij} \ddot{q}_j + \beta_i \dot{q}_i + \sum_{j=1}^{N_1} K_{ij} q_j + \sum_{v=1}^{N_1} \sum_{j=1}^v \alpha_{vj}^{(i)} q_v q_j + \sum_{v=1}^{N_1} \sum_{j=1}^v \sum_{j_1=1}^j \beta_{vjj_1}^{(i)} q_v q_j q_{j_1} = H_i \cos(\Omega t), \quad (21)$$

де $N_1 = \dim(q_1)$; m_{ij} – елементи матриці мас; $K_{11}^{(\Sigma)} = \{K_{ij}\}$ – матриця жорсткості, елементи якої знаходяться з наступного матричного рівняння: $K_{11}^{(\Sigma)} = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$; $\alpha_{vj}^{(i)}$, $\beta_{vjj_1}^{(i)}$ – коефіцієнти нелінійних доданків динамічної системи.

Динамічну систему (22) представимо щодо безрозмірних змінних і параметрів

$$\vartheta_j = \frac{q_j}{h_c}; \quad \tau = \omega_1 t; \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_1}; \quad \tau_1 = \bar{\Omega} \tau; \quad (22)$$

$$\bar{m}_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_0}; \quad \bar{\beta}_i = \frac{\beta_i}{m_0 \omega_1^2}; \quad \bar{K}_{ij} = \frac{K_{ij}}{m_0 \omega_1^2}; \quad \bar{\alpha}_{vj}^{(i)} = \frac{\alpha_{vj}^{(i)} h_c}{m_0 \omega_1^2}; \quad \bar{\beta}_{vjj_1}^{(i)} = \frac{\beta_{vjj_1}^{(i)} h_c^2}{m_0 \omega_1^2};$$

$$\bar{H}_i = \frac{H_i}{m_0 \omega_1^2 h_c} = \frac{F_0 W_{1,j}(x_0, y_0)}{m_0 \omega_1^2 h_c} = \bar{F} W_{1,j}(x_0, y_0); \quad m_0 = \rho_c h_c ab,$$

де ω_1 – перша власна частота коливань конструкції.

Динамічна система (22) щодо безрозмірних змінних і параметрів набуває наступного вигляду:

$$\bar{\Omega}^2 \sum_{j=1}^{N_1} \bar{m}_{ij} \vartheta_j'' + \bar{\Omega} \bar{\beta}_i \vartheta_j' + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{K}_{ij} \vartheta_j + \sum_{v=1}^{N_1} \sum_{j=1}^v \bar{\alpha}_{vj}^{(i)} \vartheta_v \vartheta_j + \sum_{v=1}^{N_1} \sum_{j=1}^v \sum_{j_1=1}^j \bar{\beta}_{vjj_1}^{(i)} \vartheta_v \vartheta_j \vartheta_{j_1} = \bar{H}_i \cos(\tau_1), \quad (23)$$

де $\bar{M} = \{\bar{m}_{ij}\}$.

Чисельний аналіз нелінійних коливань

Розглянемо чисельне моделювання нелінійних коливань тришарового гіперболічного параболоїда (рис. 2).

Геометричні параметри стільникового заповнювача такі:

$$l_1=6,1054 \text{ мм}; \quad l_2=3,0527 \text{ мм}; \quad \theta=60^\circ; \quad l_c=10 \text{ мм}; \quad \bar{h}_c=0,4 \text{ мм}, \quad (24)$$

де \bar{h}_c – товщина стінок стільників; l_c – висота стільникового заповнювача.

Стільниковий заповнювач замінюється гомогенізованим шаром з наступними механічними характеристиками:

$$E_{11}=2,91 \text{ МПа}; \quad E_{22}=2,91 \text{ МПа}; \quad E_{33}=215,1 \text{ МПа}; \quad \nu_{12}=0,972; \quad \nu_{23}=0,0051; \quad \nu_{13}=0,0042; \\ G_{12}=1,118 \text{ МПа}; \quad G_{23}=39,1 \text{ МПа}; \quad G_{13}=39,1 \text{ МПа}; \quad \rho_c=253,189 \text{ кг/м}^3. \quad (25)$$

Верхній та нижній шари виготовляються з вуглепластику, який задовольняє закону Гука. Інженерні константи цього матеріалу такі:

$$E_x=160 \times 10^9 \text{ Па}; \quad E_y=6,8 \times 10^9 \text{ Па}; \quad \nu_{xy}=0,32; \quad \nu_{yx}=0,0136; \\ G_{xy}=800 \times 10^9 \text{ Па}; \quad G_{xz}=G_{yz}=4 \times 10^9 \text{ Па}; \quad \rho_f=\rho_b=1400 \text{ кг/м}^3. \quad (26)$$

Геометричні параметри конструкції такі: $a=0,22 \text{ м}$; $b=0,33 \text{ м}$; $R_1=-R_2=0,6 \text{ м}$; $h_f=h_b=10^{-3} \text{ м}$; $h_c=10^{-2} \text{ м}$.

Періодичні коливання та їх біфуркації досліджено за допомогою методу пристрілювання [15–18], який зводився до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо початкових умов періодичних коливань, яка розв'язується методом Ньютона. Для розрахунку матриць Якобі методу Ньютона виводяться спеціальні системи диференціальних рівнянь, рішення яких є елементами матриць Якобі [19, 20]. Для розрахунків частотних відгуків метод пристрілювання застосовується разом із методом продовження рішення за параметром [15–18].

Для оцінки стійкості й біфуркацій періодичних коливань розраховувалися мультиплікатори [15–18].

Будемо чисельно досліджувати періодичні коливання в області субгармонічних резонансів, що задовольняє умові:



Рис. 2. Тришаровий гіперболічний параболоїд

$$\bar{\Omega} = 2\bar{\omega}_1 + \varepsilon\sigma,$$

де $\bar{\omega}_1$ – перша безрозмірна частота коливань конструкції; $0 < \varepsilon \ll 1$ – малий параметр; σ – розклад.

Результати розрахунків нелінійних коливань наводяться на частотних відгуках (рис. 3–4). На рис. 3, а показано залежність другої гармоніки ряду Фур'є субгармонічних коливань $\vartheta_2(\tau_1)$ від безрозмірної частоти збудовальної дії $\bar{\Omega}$. На рис. 4, а представлена така сама залежність для другої гармоніки ряду Фур'є періодичних коливань $\vartheta_1(\tau_1)$. Крива *AC*, зображена на рис. 3, а, описує гармонічні періодичні коливання в області основного резонансу, що зазнають двох біфуркацій подвоєння періоду PD_1 і PD_2 . Внаслідок цих біфуркацій народжуються субгармонічні рішення другого порядку, які описуються суцільною лінією, що розташовується між біфуркаційними точками PD_1 і SN_1 . Такі стійкі субгармонічні коливання зазнають сідло-вузлової біфуркації SN_1 , внаслідок якої ці коливання перетворюються на нестійкі. Такі нестійкі субгармонічні коливання описуються пунктирною лінією між точками SN_1 і PD_2 . Крім того, вони впливають у гармонійні в біфуркаційній точці подвоєння періоду PD_2 , в якій нестійкі гармонійні коливання перетворюються на стійкі. Щойно описану динамічну поведінку коливань можна простежити на рис. 3, а, де показується гармоніка $A_{\vartheta_2}^{(2)}$.

Субгармонічні коливання, що народжуються в біфуркаційних точках подвоєння періоду, є полігармонічними. Перші гармоніки ряду Фур'є коливань $\vartheta_1(\tau_1)$ і $\vartheta_2(\tau_1)$ наводяться на рис. 3, б та рис. 4, б. Такі гармоніки виникають лише у субгармонічних коливань. Як випливає з рис. 3–4, перша гармоніка має значно більші амплітуди порівняно з другою. Як приклад на рис. 5 показано субгармонічні коливання другого порядку $\dot{\vartheta}_2(\tau_1)$.

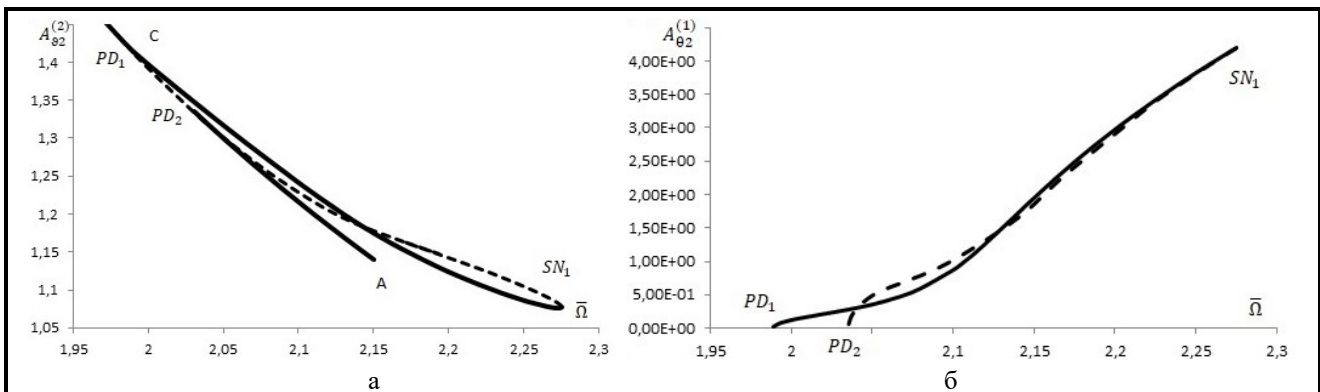


Рис. 3. Частотні відгуки гармонік ряду Фур'є коливань $\vartheta_2(\tau_1)$:
а – по осі ординат показано другу гармоніку ряду Фур'є $A_{\vartheta_2}^{(2)}$;
б – по осі ординат показано першу гармоніку ряду Фур'є $A_{\vartheta_2}^{(1)}$

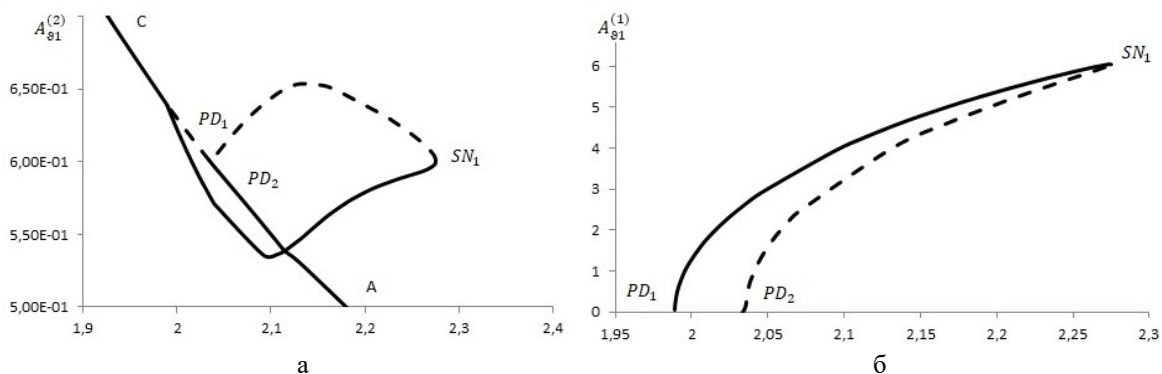


Рис. 4. Частотні відгуки гармонік ряду Фур'є коливань $\vartheta_1(\tau_1)$:
а – по осі ординат показано другу гармоніку ряду Фур'є $A_{\vartheta_1}^{(2)}$;
б – по осі ординат показано першу гармоніку ряду Фур'є $A_{\vartheta_1}^{(1)}$

Висновки

У ході дослідження виведено нову математичну модель нелінійних коливань тришарових оболонок подвійної кривизни. Стільникові заповнювачі виготовлені за допомогою адитивних технологій FDM. Доведено, що деформаційний стан оболонки описується зсувною теорією високого порядку, а динамічна поведінка кожного шару оболонки – п'ятьма величинами (трьома проєкціями переміщень і трьома кутами повороту нормалі до серединної поверхні).

За допомогою методу заданих форм виведено систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що описує нелінійні коливання тришарової конструкції. З огляду на те,

що верхній і нижній шари тонкі, а щільність стільникового заповнювача мала, частина елементів матриці мас має елементи, близькі до нуля. Внаслідок цього частина узагальнених координат поводить ся квазістатично. Ці узагальнені координати виражаються через інші узагальнені координати, які описують високочастотні коливання. Такий підхід дозволяє скоротити розмірність динамічної системи, що описує нелінійні коливання.

Для моделювання періодичних коливань чисельно досліджується одержана система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь за допомогою спеціально розробленого підходу, що включає поєднання методу продовження з методом пристрілювання. Завдяки цьому підходу отримано частотні відгуки коливань й досліджено біфуркації періодичних коливань.

Нелінійні коливання конструкції розкладаються за формами лінійних коливань. Тому аналіз лінійних коливань є важливим етапом дослідження нелінійної динаміки конструкції. Для дослідження лінійних коливань застосовувався метод Релея-Рітца.

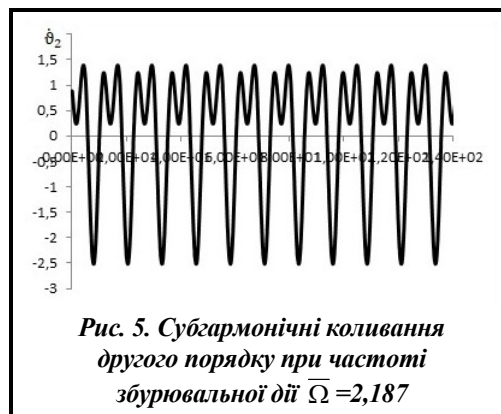
Виявлено коливання зі значними амплітудами в області субгармонічного резонансу, коли частота збурювальної дії близька до подвоєної власної частоти коливань конструкції. Ці субгармонічні коливання виникають внаслідок біфуркацій подвоєння періоду гармонічних коливань. Такі субгармонічні коливання зазнають сідло-вузлової біфуркації і є полігармонічними з переважною першою гармонікою ряду Фур'є. Зазначимо, що біфуркація подвоєння періоду має одиничний характер і не призводить до нескінченної послідовності біфуркацій подвоєння періоду.

Фінансування

Дану роботу частково підтримано Національним фондом досліджень України (грант 128/02.2020).

Література

1. Derevianko I., Uspensky B., Avramov K., Salenko A., Maksymenko-Sheiko K. Experimental and numerical analysis of mechanical characteristics of fused deposition processed honeycomb fabricated from PLA or ULTEM 9085. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2023. Vol. 25. Iss. 2. P. 264–283. <https://doi.org/10.1177/10996362221137292>.
2. Uspensky B., Derevianko I., Avramov K., Polishchuk O., Salenko A. Experimental and numerical study on fatigue of sandwich plates with honeycomb core manufactured by fused deposition modeling. *Applied Composite Materials*. 2022. Vol. 29 (5). P. 2033–2061. <https://doi.org/10.1007/s10443-022-10057-w>.
3. Matthews N. Additive metal technologies for aerospace sustainment. *Aircraft Sustainment and Repair*. 2018. P. 845–862. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100540-8.00015-7>.
4. Voparai K. S., Singh R. Advances in fused deposition modeling. *Materials Science and Materials Engineering*. 2017. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.04166-7>.
5. Wilkins D. J., Bert C. W., Egle D. M. Free vibrations of orthotropic sandwich conical shells with various boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 1970. Vol. 13. Iss. 2. P. 211–228. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(70\)81175-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(70)81175-0).
6. Kanematsu H. H., Hirano Y. Bending and vibration of CFRP – faced rectangular sandwich plates. *Computers and Structures*. 1988. Vol. 10. Iss. 2. P. 145–163. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(88\)90044-X](https://doi.org/10.1016/0263-8223(88)90044-X).
7. Frostig Y., Baruch M., Vilnay O., Sheinman I. High-order theory for sandwich beam with transversely flexible core. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 2000. Vol. 118. Iss. 5. P. 1026–1043. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1992\)118:5\(1026\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:5(1026)).



8. Malekzadeh K., Khalili M. R., Mittal R. K. Local and global damped vibrations of plates with a viscoelastic soft flexible core: An improved high-order approach. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2005. Vol. 7. Iss. 5. P. 431–456. <https://doi.org/10.1177/1099636205053748>.
9. Frostig Y., Thomsen O. T. High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. Iss. 5–6. P. 1697–1724. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.051>.
10. Hohe J., Librescu L., Oh S. Y. Dynamic buckling of flat and curved sandwich panels with transversely compressible core. *Computers and Structures*. 2006. Vol. 74. Iss. 1. P. 10–24. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.03.003>.
11. Catapano A., Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: homogenisation of core properties. *Composite Structures*. 2014. Vol. 118. P. 664–676. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057>.
12. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
13. Amabili M. Nonlinear mechanics of shells and plates in composite, soft and biological materials. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. <https://doi.org/10.1017/9781316422892>.
14. Meirovitch L. Fundamentals of vibrations. New York: McGraw Hill Higher Education, 1970. 826 p.
15. Parker T. S., Chua L. O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer, 1989. 348 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>.
16. Seydel R. Tutorial on continuation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1991. Vol. 1. No. 1. P. 3–11. <https://doi.org/10.1142/S0218127491000026>.
17. Seydel R. Nonlinear computation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1997. Vol. 7. No. 9. P. 2105–2126. <https://doi.org/10.1142/S0218127497001564>.
18. Doedel E., Keller H. B., Kernevez J. P. Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) Bifurcation in finite dimensions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1991. Vol. 1. No. 3. P. 493–520. <https://doi.org/10.1142/S0218127491000397>.
19. Avramov K. Bifurcation behavior of steady vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities interacting with three-dimensional inviscid potential flow. *Journal of Vibration and Control*. 2016. Vol. 22. Iss. 5. P. 1198–1216. <https://doi.org/10.1177/1077546314534716>.
20. Avramov K., Raimberdiyev T. Bifurcations behavior of bending vibrations of beams with two breathing cracks. *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 178. P. 22–38. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.006>.

Надійшла до редакції 27.03.2023