

УДК 539.3

## ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ, БЛИЗЬКИХ ДО КРУГОВИХ, ВИГОТОВЛЕНИХ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО- ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Л. С. Рожок,

д-р фіз.-мат. наук

[teor\\_mex@ukr.net](mailto:teor_mex@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-7926-9074

Національний транспортний  
університет,  
01010, Україна, м. Київ,  
вул. М. Омеляновича-Павленка, 1

*Порожнисті циліндри кругового поперечного перерізу, виготовлені з функціонально-градієнтних матеріалів, застосовуються в багатьох галузях господарювання як елементи конструкцій та деталі машин і агрегатів. Під час виготовлення або у процесі експлуатації таких циліндрів форма їх поперечного перерізу може певною мірою відрізнятися від кругової. Стаття присвячена розв'язанню задачі про рівновагу неоднорідних по товщині порожнистих циліндрів, близьких до кругових, у просторовій постановці за певних граничних умов на торцях. Поперечний переріз розглядуваних циліндрів описано за допомогою рівняння равілика Паскаля. Для матеріалу обрано двокомпонентний неперервно-неоднорідний матеріал, пружні властивості якого, що характеризують модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона, можуть бути визначені за допомогою концентрації матеріалів композиції вздовж товщини. Метою роботи є проведення чисельного аналізу напруженого стану циліндрів даного класу залежно від закону зміни пружних властивостей матеріалу. Розв'язок задачі базується на редукції вихідної тривимірної крайової задачі для системи рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами до одномірної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами більш високого порядку. При цьому застосовується аналітичний метод відокремлення змінних у двох координатних напрямках, із паралельним використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Одномірна крайова задача розв'язується за допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації. Проведено аналіз напруженого стану розглядуваних циліндрів залежно від величини вм'ятини, що має місце в околі одного з діаметрів поверхні відліку, і закону зміни пружних характеристик матеріалу. Показано, що нелінійність закону розподілу пружних характеристик вздовж товщини призводить до збільшення/зменшення максимальних значень нормальних переміщень і поздовжніх напружень в 1,3 рази, порівняно з лінійним законом. При цьому збільшення величини вм'ятини призводить до зростання значень як переміщень, так і нормальних напружень у 2–3 рази в зоні максимальної величини вм'ятини, порівняно з діаметральною протилежною зоною. Отримані в роботі результати можуть бути використані при розрахунках на міцність елементів конструкцій та деталей машин подібного типу.*

**Ключові слова:** дискретні ряди Фур'є, напружений стан, порожнисті циліндри, просторова теорія пружності, рівняння равілика Паскаля, функціонально-градієнтні матеріали.

### Вступ

Використання порожнистих циліндрів як елементів конструкцій та деталей машин вимагає забезпечення міцності й надійності при їх експлуатації. Зауважимо, що для прийняття оптимальних проектно-конструкторських рішень при розробці нових конструкцій машин, обладнання, споруд саме на ранніх стадіях проектування необхідна детальна інформація про вплив на напружений стан як конструктивних параметрів, властивостей матеріалу, з яких вони виготовлятимуться, так і відповідних умов експлуатації [1, 2]. За відсутності експериментальних даних така інформація може бути отримана тільки за допомогою теоретичних моделей. Отже, розроблення перспективних видів конструкцій залежить від наявності якнайшвидшого віднайдення ефективних засобів математичного моделювання.

Зауважимо, що, виходячи із специфіки експлуатації та висунутих вимог, для забезпечення міцності і надійності розглядуваних конструкцій та елементів з них нині застосовуються різні методики й підходи при розв'язанні класів задач про напружено-деформований стан пластин й оболонок. Так, у роботі [3] запропоновано методику, яка дає змогу розв'язок тривимірних крайових задач для товстих термочутливих пластин зводити до двовимірного випадку. У роботі [4] в рамках просторової теорії

пружності запропоновано два варіанти напіваналітичного методу скінченних елементів стосовно дослідження частот вільних коливань і форм розподілу переміщень в них. Розвитку напіваналітичних методів присвячена робота [5]. У роботі [6] для визначення напружено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок застосовано удосконалений метод скінчених елементів із використанням багатопараметричного вейвлет-скінченого елемента.

У той саме час елементи конструкцій у вигляді порожнистих циліндрів дуже часто працюють у складних умовах, за яких зовнішня і внутрішня поверхні знаходяться у середовищах з різними властивостями. При цьому для побудови таких конструкцій доцільно використовувати функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), що мають неперервно-змінні вздовж певного напрямку механічні властивості. До речі, на початку свого використання неперервно-неоднорідні (функціонально-градієнтні) матеріали були запропоновані як альтернатива однорідним покриттям і прошаркам у деталях аерокосмічних апаратів, схильних до впливу надвисоких температур [7, 8]. Дослідження показали, що матеріали із змінними вздовж товщини пружні властивості мають більш високий ступінь стійкості до зносу і розтріскування. Крім того, машинні деталі, виготовлені з ФГМ, мають більш тривалий строк експлуатації порівняно із звичайними цільно-керамічними деталями [9].

Найчастіше для виготовлення ФГМ обирають кераміку й метал. У роботах [10–13] розглянуто задачі про статичний та динамічний стан пластин і оболонок, виготовлених з ФГМ. Для дослідження статичної поведінки й аналізу напруженого стану товстостінних кругових циліндрів у роботі [14] використано загальну теорію деформації зсуву із застосуванням методу узагальнених диференціальних квадратур та ітераційного методу Ньютона-Рафсона. Задачу про напружений стан товстих порожнистих циліндрів, виготовлених з ФГМ, в яких властивості змінюються в радіальному й осьовому напрямках при дії термічних і механічних навантажень, розглянуто в роботі [15]. При цьому застосовано безсітковий метод Петрова-Гальоркіна з інтегруванням за часом лінійних диференціальних рівнянь методом Кранка-Нікольсона й Ньюмарка.

Один із підходів до розв'язування задач про напружений стан кругових порожнистих циліндрів, які знаходяться під дією поверхневого навантаження за певних граничних умов на торцях, полягає в поданні розв'язку у вигляді подвійного ряду Фур'є (за напрямком твірної та напрямної циліндра), що дає змогу звести вихідну тривимірну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами до одновимірної для системи звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується одним із чисельних методів (за товщиною циліндра) [16]. У випадку некругового поперечного перерізу вихідна тривимірна крайова задача описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що не дозволяє відокремити змінні в напрямку напрямної. Для подолання цієї проблеми запропоновано підхід, згідно з яким після відокремлення змінних у напрямку твірної до системи диференціальних рівнянь, що розв'язується, вводяться доповняльні функції, які в подальшому апроксимуються дискретними рядами Фур'є, що дає змогу формально подати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами як систему зі сталими коефіцієнтами і провести відокремлення змінних у напрямку напрямної. Інтегрування отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь здійснюється на основі стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації, з визначенням на кожному кроці інтегрування амплітудних значень доповняльних функцій за допомогою стандартної процедури обчислення коефіцієнтів дискретного ряду Фур'є. Перевага такого підходу полягає в тому, що він дозволяє точно задовольнити граничні умови на бічних поверхнях циліндра, врахувати зміну механічних параметрів матеріалу вздовж товщини циліндра й отримати розв'язок задачі, близький до точного.

**Метою** даної роботи є дослідити вплив на напружений стан порожнистих близьких до кругових циліндрів, що знаходяться під дією поверхневого розподіленого навантаження, зміни закону пружних властивостей матеріалу на основі нетрадиційного підходу, що базується на використанні аналітичних методів відокремлення змінних у двох координатних напрямках із паралельним застосуванням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є й чисельного методу дискретної ортогоналізації [17].

### **Постановка задачі та методика розв'язання**

Розглядаються пружні тіла у вигляді порожнистих циліндрів, що обмежені двома криволінійними поверхнями, між якими відстань, що визначає товщину тіла, є сталою. Матеріал пружного тіла – ізотропний і неоднорідний по товщині, внаслідок чого, тіло підпорядковується узагальненому закону

Гука. Беручи до уваги той факт, що переміщення порівняно з товщиною, а також відносні зсуви порівняно з одиницею виявляються незначними, за основні приймаються рівняння лінійної просторової теорії пружності [18]. При цьому пружні тіла являють собою суцільні тіла, які не зазнають розривів.

У даній роботі порожнисті циліндри віднесено до криволінійної системи координат  $s, t, \gamma$ , де  $s=const, t=const$  – лінії головних кривизн на деякій координатній циліндричній поверхні, а координата  $\gamma$  відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні. Дугова координата  $t$  відкладається від певної фіксованої твірної, а параметр  $s$  твірної вважаємо рівним відстані до одного з граничних контурів координатної поверхні. За координатну поверхню відліку обрано середню поверхню циліндра, рівновіддалену від його обмежуючих поверхонь.

Квадрат довжини лінійного елемента в обраній системі координат має вигляд

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2 dt^2 + d\gamma^2,$$

де  $H_1=H_3=1; H_2=1 + \nu/R_t$ , тут  $R_t$  – радіус кривизни напрямної поверхні відліку.

Задача розв'язується за таких передумов: напрямна координатної поверхні являє собою довільну неперервну кусково-гладку замкнену поверхню; механічні характеристики можуть бути змінними вздовж товщини, залишаючись сталими вздовж твірної, прикладене навантаження може задаватися довільно.

При розв'язуванні задач теорії пружності для порожнистих циліндрів необхідно задовольняти не тільки основним рівнянням теорії пружності, а й відповідним граничним умовам на обмежуючих поверхнях.

Нехай циліндри знаходяться під дією зовнішнього нормального навантаження  $q=q_0 \cdot \sin(\pi s/L)$  ( $q_0=const, L$  – довжина циліндра), тоді граничні умови на бічних поверхнях мають вигляд

$$\sigma_\gamma = 0, \tau_{s\gamma} = 0, \tau_{t\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = -h/2;$$

$$\sigma_\gamma = q_0 \cdot \sin(\pi s/L), \tau_{s\gamma} = 0, \tau_{t\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = h/2, \quad (1)$$

де  $h$  – товщина циліндра.

Розглядаються циліндри, замкнені вздовж напрямної, у такому разі мають місце умови періодичності усіх факторів напруженого стану ( $P$  – період)

$$\sigma_\gamma(s, t, \gamma) = \sigma_\gamma(s, t + P, \gamma), \tau_{s\gamma}(s, t, \gamma) = \tau_{s\gamma}(s, t + P, \gamma), u_\gamma(s, t, \gamma) = u_\gamma(s, t + P, \gamma). \quad (2)$$

На торцях циліндрів має місце діафрагма, абсолютно жорстка у своїй площині і гнучка при виході з неї, тобто

$$\sigma_s(t, \gamma) = 0, u_t(t, \gamma) = u_\gamma(t, \gamma) = 0 \text{ при } s=0, s=L. \quad (3)$$

За розв'язувальні приймаються функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях, тобто три компоненти напружень  $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{t\gamma}$ , до яких додаються три компоненти переміщень  $u_\gamma, u_s, u_t$ . Після певних перетворень з основних рівнянь (трьох рівнянь рівноваги, шести виразів деформацій через переміщення і шести співвідношень узагальненого закону Гука) можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами, яка разом з граничними умовами (1)–(3) описує тривимірну крайову задачу у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2 R_t} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t} + \frac{1}{H_2 R_t} \left[ \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_\gamma \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2 R_t} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_\gamma \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\gamma \right] - \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial s} \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{2}{H_2 R_t} \tau_{t\gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_\gamma \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\gamma \right] - \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial s} \right) \right]; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{1}{R_t} u_\gamma \right) + \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_\gamma; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \\ \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{1}{R_t} u_t; \\ (0 \leq s \leq L; \quad t_0 \leq t \leq t_0 + P; \quad -h/2 \leq \gamma \leq h/2).\end{aligned}$$

Наявність граничних умов (3) дозволяє відокремити змінні в напрямку твірної, подаючи розв'язувальні функції, враховуючи прикладене навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою  $s$

$$X(t, s, \gamma) = \sum_{n=1}^N [X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s]; \quad Y(t, s, \gamma) = \sum_{n=0}^N [Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s], \quad (5)$$

де  $X = \{\sigma_\gamma, \tau_{r\gamma}, u_\gamma, u_t, q\}$ ;  $Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s\}$ ;  $\lambda_n = \frac{\pi n}{L}$ .

Підставляючи ряди (5) та граничні умови (1) до розв'язувальної системи (4), відокремлюючи змінні, отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами для кожного члена ряду (5), яка описує двовимірну крайову задачу.

Оскільки розглядаються порожнисті циліндри з близькою, але не круговою формою поперечного перерізу, система диференціальних рівнянь, що розв'язується, має коефіцієнти, які залежать від двох координат  $t, \gamma$  і не дозволяють відокремити змінні в напрямку напрямної. Для подолання цієї перешкоди, добутки функцій, що розв'язуються, на зазначені коефіцієнти формально записують у вигляді так званих доповняльних функцій, перетворюючи тим самим формально розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами на систему зі сталими коефіцієнтами. Опускаючи індекс  $n$  в позначеннях розв'язувальних функцій, позначивши доповняльні функції через

$$\begin{aligned}\varphi_1^j(t, \gamma) &= \frac{1}{H_2} \frac{1}{R_t} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{1}{R_t} u_\gamma \right\}, \quad (j = \overline{1, 5}); \\ \varphi_2^j(t, \gamma) &= \frac{1}{H_2} \frac{1}{R_t} \left\{ \tau_{r\gamma}; u_t \right\}, \quad (j = \overline{1, 2}); \\ \varphi_3^j(t, \gamma) &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\}, \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_4^j(t, \gamma) &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{r\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{R_t} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\}, \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_5^j(t, \gamma) &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial t}; \quad \varphi_6^j(t, \gamma) = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi_3^3}{\partial t}; \quad \varphi_7^j(t, \gamma) = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi_4^2}{\partial t}\end{aligned} \quad (6)$$

дістанемо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma} + \left( \frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_1^1 - \varphi_4^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_1^4 + \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_4^3 - \varphi_1^5); \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_s - \varphi_1^2 - \left( \frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \right) \lambda_n \varphi_4^2 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_1^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_6; \\ \frac{\partial \tau_{r\gamma}}{\partial \gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_t - 2\varphi_2^1 + \left( \frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_3^3 - \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_7 + \varphi_5) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_3^1;\end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_\gamma + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_s - \varphi_4^2 - \varphi_1^3); \\ \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \\ \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{t\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^3.\end{aligned}$$

Як було зазначено вище, отримана система диференціальних рівнянь (7) формально є системою зі сталими коефіцієнтами. Для відокремлення змінних у напрямку напрямної подамо розв'язувальні, доповняльні функції й компоненти навантаження у вигляді розвинень у ряди Фур'є за координатою  $t$

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t; \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t; \quad \lambda_k = \frac{2\pi k}{P}, \quad (8)$$

де  $\tilde{X} = \{\sigma_\gamma, \tau_{t\gamma}, u_\gamma, u_t, q, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6\}$ ;  $\tilde{Y} = \{\tau_{s\gamma}, u_s, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7\}$ .

Після підстановки до системи, що розв'язується, (7) рядів (8) і відповідних граничних умов, відокремлення змінних приходимо до розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (8), яка описує одомірну крайову задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\gamma,k}}{\partial \gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left( \frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{4,k}^3 - \varphi_{1,k}^5); \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma,k}}{\partial \gamma} &= \frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \left( \frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k}; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma,k}}{\partial \gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{t,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left( \frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1; \\ \frac{\partial u_{\gamma,k}}{\partial \gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3); \\ \frac{\partial u_{s,k}}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \\ \frac{\partial u_{t,k}}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{t\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^3\end{aligned} \quad (9)$$

із граничними умовами

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma,k} &= 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = -h/2; \\ \sigma_{\gamma,k} &= q_0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = h/2.\end{aligned} \quad (10)$$

Якщо в системі рівнянь (9) будуть відомі амплітудні значення доповняльних функцій, то задача зводиться до двоточкової лінійної крайової задачі зі сталими коефіцієнтами, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації одночасно для усіх гармонік рядів (8). Для встановлення амплітудних значень доповняльних функцій використовується метод їх апроксимації дискретними рядами Фур'є. Із цією метою на кожному кроці інтегрування, для фіксованого значення координати  $\gamma$ , у ряді точок напрямної, враховуючи вирази (6), за поточним значенням розв'язувальних функцій обчислюються табличні значення доповняльних функцій. Використовуючи стандартну процедуру визначення коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих таблицею своїх значень, обчислюють ці коефіцієнти, підставляють їх до розв'язувальної системи (9) і роблять наступний крок інтегрування. На початку інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій визначають виходячи з граничних умов (10).

Достовірність отримуваних результатів забезпечується використанням строгих рівнянь просторової теорії пружності, застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних і стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації. Похибка розв'язку може виникати при застосуванні чисельного методу, а також при обчисленні амплітудних значень доповняльних функцій, які задаються таблицею. Вплинути на точність отримуваних результатів можна, варіюючи кількістю точок інтегрування і ортогоналізації при застосуванні чисельного методу й кількістю точок визначення табличних значень доповняльних функцій і відповідної кількості членів, утримуваних в дискретних рядах Фур'є. Деякі приклади оцінки точності і достовірності результатів для ізотропної нетонкої оболонки при застосуванні розглянутого підходу, наведено в роботі [19].

### Числові результати та їх аналіз

На основі розглянутої методики розв'язано задачу про напружений стан порожнистих циліндрів, близьких до кругових, зі збуреною поверхнею поперечного перерізу, що має місце в околі одного з діаметрів (рис. 1). Поверхня відліку описується рівнянням равлика Паскаля, яке в полярній системі координат має вигляд

$$\rho = a \cos \psi + l, \quad (11)$$

де  $\rho$  – полярний радіус;  $\psi$  – полярний кут у поперечному перерізі;  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ;  $a$  – радіус вихідного кола;  $l$  – відстань, на яку зміщується точка вздовж радіус-вектора.

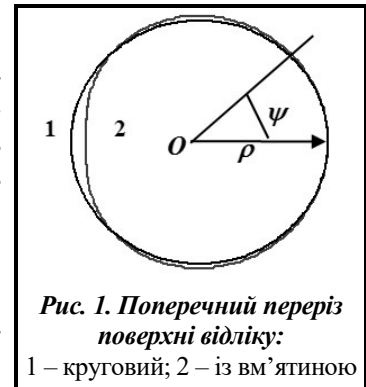


Рис. 1. Поперечний переріз поверхні відліку:  
1 – круговий; 2 – із вм'ятиною

Оскільки вихідна інформація щодо форми поверхні відліку (11) задається через параметр  $\psi$ , відмінний від  $t$ , при обчисленні відповідних похідних треба враховувати коефіцієнт переходу

$$\frac{dt}{d\psi} = \left[ \rho^2 + (\rho')^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \omega(\psi).$$

Тоді при визначенні певних доповняльних функцій, отримаємо для кожної функції  $V=V(\gamma, t(\psi))$  таку залежність

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{1}{\omega(\psi)},$$

а радіус кривизни поверхні відліку в поперечному перерізі має вигляд

$$R_{\psi} = \frac{\left[ \rho^2 + (\rho')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}.$$

Для геометричних параметрів циліндрів обрано: довжина  $L=60 \cdot l_0$ , товщина  $h=6 \cdot l_0$ , параметри равлика Паскаля  $a=5 \cdot l_0$ ;  $20 \cdot l_0$ ;  $l=40 \cdot l_0$ .

Циліндри виготовлені з ФГМ, для яких зв'язок між модулем пружності  $E$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  з відповідними параметрами матеріалів, що входять до композиції, визначаються формулами [10]

$$E = (E_2 - E_1)V + E_1; \quad \nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1,$$

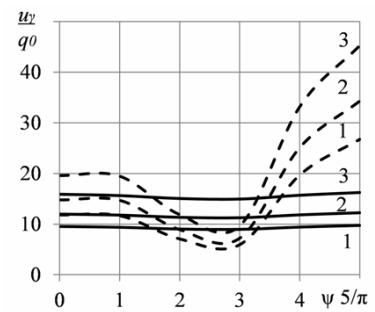
де  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  – механічні параметри першого і другого матеріалів,  $V$  – концентрація другого матеріалу залежно від координати товщини  $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$ . При розрахунках прийнято степеневий закон зміни пружних властивостей  $V=(\gamma/h+0,5)^m$ . Механічні властивості матеріалів композиції: алюміній:  $E=70$  ГПа;  $\nu=0,3$ ; SiC:  $E=427$  ГПа;  $\nu=0,17$ . Для параметру степеня обрано значення  $m=0,5; 1; 2$ . Для  $m=1$ , характер розподілу модуля пружності і коефіцієнта Пуассона вздовж товщини оболонки носить лінійний характер, який порушується для інших значень параметра  $m$ .

Результати розв'язання задачі наведено в середньому перерізі довжини циліндра ( $L=30 \cdot l_0$ ) для розподілу полів нормальних переміщень  $u_r$  в таблиці та на рис. 2, а також для розподілу полів нормальних напружень  $\sigma_r$  та  $\sigma_{\psi}$  у вигляді графіків на рис. 3–5. Через симетрію результати наведено вздовж напрямної в перерізі  $0 \leq \psi \leq \pi$ .

У таблиці наведені значення нормальних переміщень  $u_\gamma$  для циліндрів із двома видами вм'ятин ( $a=5, a=20$ ) залежно від степеня зміни закону пружних характеристик ФГМ у двох перерізах напрямної ( $\psi=0, \psi=\pi$ ) на внутрішній ( $\gamma=-3$ ), зовнішній ( $\gamma=3$ ) і поверхні відліку ( $\gamma=0$ ). На рис. 2 наведено графіки розподілу нормальних

**Таблиця. Розподіл нормальних переміщень  $u_\gamma$**

$m$	$\gamma$	$u_\gamma/q_0$			
		$a=5$		$a=20$	
		$\psi=0$	$\psi=\pi$	$\psi=0$	$\psi=\pi$
0,5	-3	9,532	9,735	11,800	26,738
	0	9,420	9,630	11,700	26,900
	3	9,334	9,538	11,574	26,669
1	-3	11,974	12,238	14,769	34,294
	0	11,800	12,100	14,600	34,500
	3	11,689	11,955	14,447	34,296
2	-3	15,888	16,235	19,578	45,245
	0	15,700	16,000	19,300	45,600
	3	15,468	15,819	19,109	45,344



**Рис. 2. Розподіл нормальних переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної циліндра:**  
1 –  $m=0,5$ ; 2 –  $m=1$ ; 3 –  $m=2$

переміщень уздовж напрямної циліндра для трьох значень степеня зміни пружних характеристик. Суцільні лінії відповідають переміщенням у циліндрах для  $a=5$ , пунктирні – для  $a=20$ .

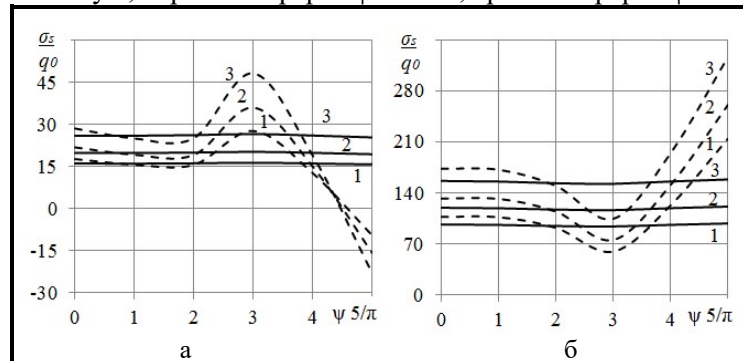
З таблиці й рис. 2 видно, що максимальних своїх значень нормальні переміщення набувають у зоні максимальної величини вм'ятини ( $\psi=\pi$ ). При цьому у випадку невеликої вм'ятини ( $a=5$ ) значення переміщень відрізняються вздовж напрямної несуттєво для усіх значень параметра  $m$ . Для циліндрів із параметром вм'ятини  $a=20$  значення переміщень у зоні максимальної її величини ( $\psi=\pi$ ) зростають приблизно у 2,3 рази, порівняно із аналогічними значеннями в перерізі ( $\psi=0$ ). Збільшення вм'ятини призводить до зростання величини переміщень приблизно у 1,25 рази в перерізі  $\psi=0$  і в 2,8 рази в перерізі  $\psi=\pi$ .

Нелінійність закону розподілу пружних властивостей матеріалу викликає зменшення величини переміщень для  $m=0,5$  і збільшення їх величини для  $m=2$  в 1,3 рази, порівняно із аналогічними величинами у випадку лінійного закону для  $m=1$ .

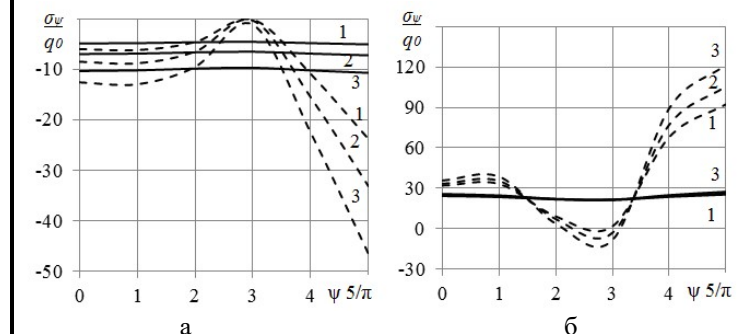
На рис. 3 наведено графіки розподілу полів нормальних поздовжніх напружень  $\sigma_s$  вздовж напрямної циліндра на внутрішній (рис. 3, а) і зовнішній поверхнях циліндра (рис. 3, б). Позначення ліній такі самі, як і на рис. 2.

Із наведених графіків видно, як впливає збільшення вм'ятини на розподіл напружень  $\sigma_s$  для трьох значень степеня закону зміни пружних властивостей ФГМ. Так, для незначної вм'ятини розподіл поздовжніх напружень має лінійний характер. При збільшенні величини вм'ятини лінійність порушується і своїх максимальних амплітудних значень напруження  $\sigma_s$  набувають на внутрішній поверхні в перерізі  $\psi=\pi/2$ , зростаючи приблизно в 1,8 рази, і в перерізі  $\psi=\pi$  на зовнішній – в 2,2 рази. Зміна закону розподілу пружних властивостей ФГМ має такий самий вплив на величину напружень, як і для переміщень.

На рис. 4, аналогічно рис. 3, наведено графіки розподілу нормальних колових напружень  $\sigma_\psi$ .



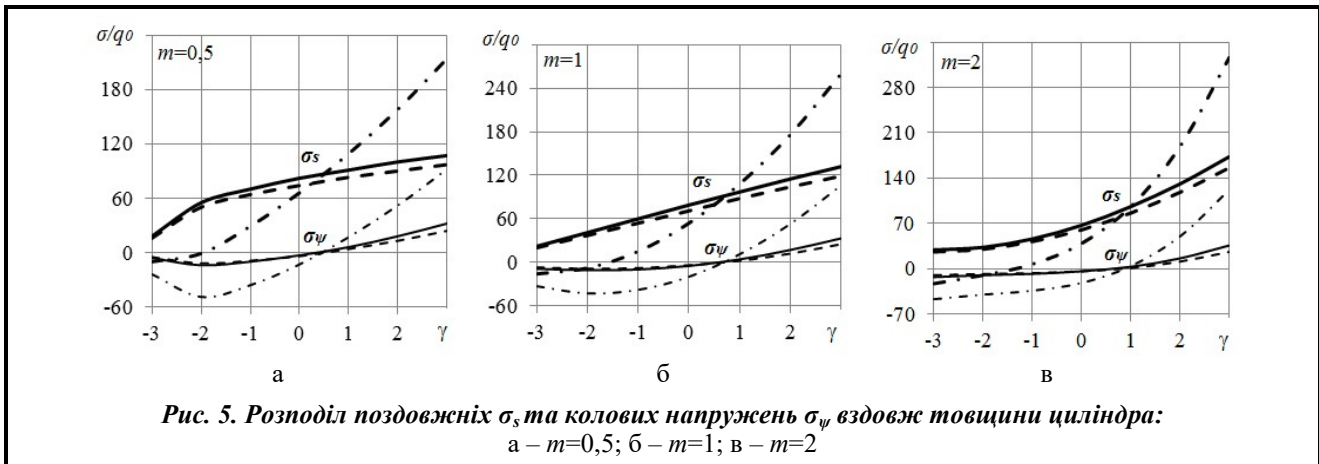
**Рис. 3. Розподіл поздовжніх напружень  $\sigma_s$  вздовж напрямної циліндра:**  
1 –  $m=0,5$ ; 2 –  $m=1$ ; 3 –  $m=2$ ;  
а – на внутрішній поверхні; б – на зовнішній



**Рис. 4. Розподіл колових напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної циліндра:**  
1 –  $m=0,5$ ; 2 –  $m=1$ ; 3 –  $m=2$ ;  
а – на внутрішній поверхні; б – на зовнішній

Із графіків, наведених на рис. 4, видно, що на відміну від поздовжніх напружень коліві набувають свого максимального амплітудного значення в перерізі максимальної величини вм'ятини ( $\psi=\pi$ ) як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях для  $a=20$ . При цьому при зміні степеня закону пружних властивостей матеріалу величина максимальних напружень збільшується на 15% для  $m=2$  і зменшується на 12% для  $m=0,5$ , порівняно з лінійним законом для  $m=1$ . Для параметра вм'ятини  $a=5$  закон розподілу колівих напружень носить майже лінійний характер і при цьому закон зміни пружних властивостей в перерізі  $\psi=\pi$  не впливає на величину напружень  $\sigma_\psi$ .

На рис. 5 наведено графіки розподілу нормальних напружень  $\sigma_s$  та  $\sigma_\psi$  вздовж товщини циліндрів залежно від величини вм'ятини і степеня закону розподілу пружних властивостей ФГМ.



Суцільні лінії відповідають кривим розподілу напружень у перерізі  $\psi=0$  для параметра вм'ятини  $a=20$ ; штрих-пунктирні лінії – у перерізі  $\psi=\pi$  для  $a=20$ ; штрихові лінії – для  $a=5$  у перерізі  $\psi=\pi$  (оскільки для циліндрів із незначною вм'ятиною ( $a=5$ ) величина нормальних напружень мало відрізняється вздовж напрямної, на рис. 5 наведено криві лише в одному перерізі напрямної). Товсті лінії відповідають кривим розподілу поздовжніх напружень  $\sigma_s$ , тонкі – колівим  $\sigma_\psi$ .

Із графіків, наведених на рис. 5, видно, що для всіх значень степеня закону зміни пружних властивостей матеріалу переважними є поздовжні напруження, що набувають своїх максимальних значень у зоні максимальної величини вм'ятини в перерізі  $\psi=\pi$ . При цьому для лінійного закону зміни степеня пружних властивостей ( $m=1$ ) для незначної вм'ятини ( $a=5$ ) і параметра  $a=20$  в перерізі  $\psi=0$  має місце лінійний закон розподілу поздовжніх напружень. Крім того, у перерізі  $\psi=0$  значення і колівих, і поздовжніх напружень близькі між собою для обох форм циліндрів й усіх значень степеня закону пружних параметрів ФГМ. Зміна степеня закону пружних властивостей ФГМ призводить до збільшення максимальних колівих напружень приблизно на 15% для  $m=2$  і зменшення їх величини приблизно на 13% для  $m=0,5$  порівняно з відповідними величинами для  $m=1$ .

## Висновки

1. У просторовій постановці розв'язано задачу про напружений стан порожнистих близьких до кругових циліндрів, що знаходяться під дією розподіленого навантаження, за певних граничних умов на торцях, виготовлених з ФГМ. При розв'язуванні задачі використано підхід, що базується на чисельно-аналітичній методиці, яка дозволяє звести вихідну тривимірну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами до одномірної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, що розв'язується стійким чисельним методом.

2. Для опису поперечного перерізу поверхні відліку циліндрів, що вивчаються, використано рівняння равлика Паскаля. Розглянуто дві форми, що мають вм'ятину в околі одного з діаметрів циліндра. Проведено аналіз характеристик напруженого стану згаданих циліндрів залежно від величини вм'ятини і показника степеневого закону зміни пружних властивостей ФГМ вздовж товщини.

3. Встановлено, що нелінійність у розподілі пружних властивостей матеріалу призводить до зменшення величини максимальних нормальних переміщень і поздовжніх напружень для  $m=0,5$  і збільшення для  $m=2$ , порівняно з відповідними величинами для  $m=1$  в 1,3 рази. Відповідно, максимальні



значення колових напружень зменшуються на 13% для  $m=0,5$  і збільшуються на 15% для  $m=2$ , порівняно з лінійним законом зміни пружних властивостей матеріалу для  $m=1$ .

4. За невеликої вм'ятини ( $a=5$ ), значення нормальних напружень майже не відрізняються за величиною вздовж напрямної циліндра. Наявність більш значної вм'ятини ( $a=20$ ) призводить до порушення лінійного закону розподілу нормальних напружень вздовж напрямної, при цьому їх значення зростають майже в 2,8 рази в перерізі  $\psi=\pi$ , порівняно з перерізом  $\psi=0$ .

Результати, отримані в роботі, можуть бути використані при розрахунках на міцність елементів конструкцій і деталей машин подібного типу.

## Література

1. Filatov H. V. Optimal design of smooth shells both with and without taking into account initial imperfections. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2020. Vol. 23. No. 1. P. 58–63. <https://doi.org/10.15407/pmach2020.01.058>.
2. Filatov H. V. Optimal design of single-layered reinforced cylindrical shells. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2021. Vol. 24. No. 1. P. 58–64. <https://doi.org/10.15407/pmach2021.01.058>.
3. Ревенко В. П. Розв'язки тривимірних задач теорії пружності для ортотропних тіл. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020. Т. 63. № 3. С. 78–84.
4. Марчук А. В., Ренейская С. В., Лещук О. Н. Трехмерный анализ свободных колебаний слоистых композитных плит на основе полуаналитического метода конечных элементов. *Прикладная механика*. 2020. Т. 56. № 4. С. 97–116.
5. Nguyen-Sy T., Vu M. N., Nguyen T. K., Tran-Le A.-D., Thai M.-Q., Nguyen T.-T. Poroelastic response of a functionally graded hollow cylinder under an asymmetric loading condition. *Archive of Applied Mechanics*. 2021. Vol. 91. Iss. 1. P. 3171–3189. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01958-6>.
6. Zhang X., He Y., Li Z., Yan R., Chen X. Static and dynamic analysis of cylindrical shell by different kinds of B-spline wavelet finite elements on the interval. *Engineering with Computers*. 2020. Vol. 36. Iss. 4. P. 1903–1914. <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00804-2>.
7. Gholami R., Darvizeh A., Ansari R., Pourashraf T. Analytical treatment of the size-dependent nonlinear postbuckling of functionally graded circular cylindrical micro-/nano-shells. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 42. Iss. 2. P. 85–97. <https://doi.org/10.1007/s40997-017-0080-6>.
8. Najibi A., Alizadeh P., Ghazifard P. Transient thermal stress analysis for a short thick hollow FGM cylinder with nonlinear temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. 2021. Vol. 146. Iss. 5. P. 1971–1982. <https://doi.org/10.1007/s10973-020-10442-2>.
9. Кушнір Р. М., Жидик У. В. Температурні напруження у функціонально-градієнтній циліндричній оболонці. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2018. Т. 54. № 5. С. 56–65.
10. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Коротких Ю. А. Осесимметричные свободные колебания цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов. *Прикладная механика*. 2015. Т. 51. № 6. С. 61–71.
11. Kurpa L. V., Shmatko T. V., Linnik A. B. Analysis of stability and vibrations of porous power and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. No. 4. P. 38–49. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.04.038>.
12. Fateeva Yu., Gristchak V. Z. An approximate analytical approach for nonlinear thermodynamic problem of FGM shallow spherical shells with time dependent parameters. *Proceeding of the 7th International Conference on Mechanics and Materials in Design (Albufeira, Portugal, June 11–15, 2017)*, 2017. P. 1109–1110.
13. Shi P., Xie J., Hao S. Static response of functionally graded piezoelectric-piezomagnetic hollow cylinder/spherical shells with axial/spherical symmetry. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021. Vol. 35. Iss. 4. P. 1583–1596. <https://doi.org/10.1007/s12206-021-0322-9>.
14. Khorshidi M. A., Soltani D. Analysis of functionally graded thick-walled cylinders with high order shear deformation theories under non-uniform pressure. *SN Applied Sciences*. 2020. Vol. 2. Article no. 1362. <https://doi.org/10.1007/s42452-020-3179-0>.
15. Salehi A., Ahmadi I. Transient thermal and mechanical stress analysis of 2D-functionally graded finite cylinder: A Truly Meshless formulation. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 46. Iss. 3. P. 573–598. <https://doi.org/10.1007/s40997-021-00432-6>.
16. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. (1985). Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища школа, 1985. 190 с.
17. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. *Прикладная механика*. 2014. Т. 50. № 2. С. 3–26.
18. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
19. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Про рівновагу нетонких циліндричних оболонок із вм'ятинною. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020. Т. 63. № 2. С. 72–82.

Надійшла до редакції 29.01.2024