

УДК 539.3

ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ КОМПОЗИТУ З ДВОМА ТОВСТОСТІННИМИ ТРУБАМИ

О. Ю. Деньщикова, канд. техн. наук

Alex_day@ukr.net

ORCID: 0009-0008-2385-5841

В. П. Пелих

venator.verba@gmail.com

ORCID: 0009-0007-5301-6697

Я. В. Гребенюк, канд. техн. наук

i.grebeniuk@khai.edu

ORCID: 0009-0004-6032-7125

В. Ю. Мірошніков, д-р техн. наук

v.miroshnikov@khai.edu

ORCID: 0000-0002-9491-0181

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 61070, Україна, м. Харків, вул. Вадима Манька, 17

Розв'язана просторова задача теорії пружності для волокнистого композиту у вигляді шару з двома циліндричними товстостінними трубами. На плоских поверхнях шару й на внутрішній поверхні труб задані напруження. Задача представлена у вигляді розв'язків рівнянь Ламе в різних системах координат, де шар розглядається в декартовій системі, труби – у локальних циліндричних. Для поєднання базисних розв'язків у різних системах координат застосовується узагальнений метод Фур'є. Задовольняючи граничним умовам і умовам спряження між шаром і трубами, формується нескінчена система інтегро-алгебраїчних рівнянь, які зводяться до лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду і використовується метод редукції. Після знаходження невідомих можна отримати напружено-деформований стан у будь-якій точці пружних поєднаних тіл. Задля цього до базисних розв'язків задачі також застосовується узагальнений метод Фур'є. По результатах чисельних досліджень можемо стверджувати, що задачу можна розв'язати із заданою точністю, яка залежить від порядку системи рівнянь. Числовий аналіз напруженого стану розглянуто з варіацією відстані між трубами. Отримані графіки розподілення внутрішніх напружень у трубах і шарі. Результати показують зворотну залежність між величиною напружень і відстанню між трубами. Крім абсолютної величини напружень, можливі зміни в характері епюр і знаку. Запропонований метод розв'язання може бути використаний під час проектування деталей і механізмів, розрахункова модель яких представляє собою шар із циліндричними трубами, в машино- й авіабудуванні. Отриманий напружено-деформований стан дає змогу попередньої оцінки геометричні параметри конструкції. Подальший розгляд теми дослідження необхідний для моделі, де труби комбінуються з іншими типами неоднорідностей.

Ключові слова: волокнистий композит, узагальнений метод Фур'є, рівняння Ламе.

Вступ

Волокнисті композити часто використовуються в машино- й авіабудуванні, що підвищує вигоди до оцінки напружено-деформованого стану таких тіл і змушує шукати найефективніші методи розрахунку. Модель волокнистих композитів представляється як нескінчений шар із поздовжніми включеннями. Перерізи включень можуть бути різної форми, повнотілі або з порожнинами. Крім того, на поверхнях моделі, зокрема, поверхнях спряження, можуть задаватися різні граничні умови.

Модель шару з врізаними трубами застосовується: в охолоджувальних системах (у двигунах та інших механізмах труби можуть бути вбудовані в шари конструкцій для циркуляції охолоджувальної рідини), паливних системах (у деяких конструкціях трубки можуть бути вбудовані в металеві шари для транспортування палива до двигунів або інших вузлів машин), для шумопоглинання й віброізоляції (у трубах, вбудованих у шари конструкцій, можуть циркулювати повітря або інші гази, що сприяє зниженню вібрацій або шумів у механічних системах), у турбокомпресорах (у турбінах і компресорах труби можуть бути вбудовані в шари корпусу для подачі повітря або газу під тиском у системі турбонаддуву), у системах змащування (у машинобудуванні трубки, вбудовані в шари металевих конструкцій, можуть забезпечувати подачу мастила до критично важливих частин машин і механізмів, зменшуючи тертя та зношування).

Одним із підходів до розв'язання задач із композитом є випробування зразків із готових листів [1]. У цьому випадку армований шар представляється як фізично нелінійний матеріал з анізотропними характеристиками. Це добре підходить для стохастичної структури або для шару з великою кі-

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.
© О. Ю. Деньщикова, В. П. Пелих, Я. В. Гребенюк, В. Ю. Мірошніков, 2024

лькістю армування [2]. Проте такий підхід значно ускладнює проектування при змінних геометричних характеристиках композиту або змінних граничних умов. Беручи вказане до уваги, у більшості робіт композит розглядається як сукупність спряжених елементів. З огляду на це при розв'язанні задач із композитом застосовують аналітичні, аналітико-числові або числові методи, іноді ці методи комбінуються між собою і з випробуваннями.

Як показує досвід, найчастіше при розв'язанні таких задач стають у нагоді числові методи [3] і комп'ютерні програми на їх основі [4]. Так, у роботі [5] до задачі для півпростору, армованого оболонкою та вертикальною циліндричною порожниною, застосований метод скінчених елементів. Проте числові методи дають наближені значення напружено-деформованого стану, що не додає впевненості, коли потрібен високоточний результат. Вказане змушує шукати інші методи або додаткові підходи.

Точними вважаються класичні аналітичні методи [6, 7]. Вони базуються на розкладі розв'язків у ряд Фур'є. Однак класичні методи не дозволяють розв'язувати просторові задачі, коли модель містить більше ніж три граничних поверхні, що характерно для композитів.

Є низка робіт [8–11], в яких розглянуто задачі для композитів із врахуванням нелінійності моделі.

Так, у дослідженні [8] розв'язано задачу визначення динамічного напруженого стану для двох стрижнів різної довжини, що з'єднані внахлест, а до одного зі стрижнів прикладено повздовжнє навантаження. Для моделювання клейового з'єднання використано модель Голанда-Рейснера, в якій опорні шари розглядаються як балки в наближенні Бернуллі, а клейовий шар – як пружна основа Вінклера.

У роботі [9] проаналізовано багатопарову конструкцію під дією динамічного поперечного навантаження. Розв'язок полягав у використанні двовимірної дискретної структури, а вектор переміщень було розкладено у степеневий ряд. Рішення корелюється з результатами експериментального дослідження.

У публікації [10] запропоновано метод розрахунку термонапруженого стану склопакета літака. При цьому склопакет розглянуто як циліндричну ламіновану незамкнену оболонку постійної товщини при дії конвекційного теплообміну. Аналогічно до попереднього дослідження результати відповідають експериментальним даним.

Робота [11] презентує методику аналізу напружено-деформованого стану ламінованого композиту при зіткненні з птахом і дії внутрішнього надлишкового тиску. Модель ламінованого склопакета базується на теорії, яка враховує поперечні зсувні деформації, зменшення товщини й інерційні явища. Математична модель тиску, яка відтворює удар птаха, ґрунтується на експериментальних дослідженнях.

У той саме час методи, що застосовуються в роботах [8–11], не дозволяють врахувати циліндричних порожнин або включень.

У працях [12–17] розглядаються циліндричні неоднорідності, розташовані перпендикулярно межах шару.

Так, у роботі [12] задача розв'язується за допомогою припущення про ідеальні умови контакту на верхній і нижній межах шару. У дослідженні [13] використано подібний підхід, але за умови, що нижня поверхня шару жорстко защемлена. Задача про шар із циліндричним включенням або порожниною, що проходить паралельно межах шару, не може бути вирішена методами, запропонованими в цих роботах, оскільки використання інтегральних перетворень Лапласу й інтегральних синус-і косинус-перетворень Фур'є до граничних умов і рівнянь руху створює одновимірну векторну неоднорідну крайову задачу, яка може дати розв'язки лише для задач дифракції хвиль.

Для пластини з перфорацією в роботі [14] були застосовані аналіз напружень за допомогою генетичного алгоритму (GA), алгоритму гравітаційного пошуку (GSA) і алгоритму Bat (BA), але запропонований підхід також є наближеним.

У роботі [15] розглядалося кручення пружного півпростору з вертикальною циліндричною порожниною, коаксіальним штампом. Задача розв'язувалася двома новаторськими методами, що зводили розв'язок до звичайних інтегральних рівнянь другого роду. При цьому рішення є досить наближеним і має деякі розбіжності з розв'язанням задачі Рейснера-Сагоці.

У дослідженні [16] для композитних ламінованих перфорованих пластин розроблено аналітичний розв'язок на основі методу шарового збивання. Надійність і точність запропонованого методу підтверджено порівнянням зі скінченно-елементним розрахунком. У роботі [17] розв'язано задачу крутильних коливань плоского круглого штампа, зчепленого з верхньою межею багатопарової пружної основи, яка містить вертикальну циліндричну порожнину з віссю, перпендикулярною межі шарів. Для

розв'язання використовується інтегральне перетворення Вебера і парні інтегральні рівняння. Методи, про які йдеться в дослідженнях [16, 17], не підходять для розв'язку задач з неоднорідностями, розташованими паралельно шару.

Метою цієї роботи є створення високоточного методу розв'язання задачі теорії пружності для шару з двома поздовжніми циліндричними товстостінними трубами. На поверхнях шару і на внутрішніх поверхнях труб задані напруження. Шар і труби жорстко спряжені.

Найбільш ефективним методом, що дозволяє отримати точні результати вказаної моделі, є аналітико-числовий узагальнений метод Фур'є [18]. Основною його перевагою є те, що він дозволяє отримувати розв'язок для групи тіл, кожне з яких має свою систему координат. При цьому, використовуючи функції переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе, можна застосувати одночасно різні типи систем координат.

За допомогою узагальненого методу Фур'є отримані розв'язки для пружного циліндра з циліндричними порожнинами [19, 20] й циліндричними включеннями [21], а також для півпростору зі сферіальною порожниною [22]. Розв'язання представлене як суперпозиція точних базисних розв'язків рівняння Ламе для циліндра в системах координат, віднесених до центрів граничних поверхонь тіла.

Подальшим розвитком методу є застосування формул переходу базисних розв'язків між циліндричною й декартовою системами координат. Прикладом можуть бути наступні наробики: у роботі [23] такі формули запропоновані для півпростору з циліндричною порожниною, у [24] – для шару з порожниною, на поверхні якої задані напруження, у [25] показано розв'язок для шару з циліндричним включенням. Проте загальним недоліком робіт [23–25] є наявність тільки двох незалежних систем координат: декартової для шару чи півпростору й циліндричною для неоднорідності. При цьому не застосовуються формули переходу між локальними циліндричними системами координат, що не дозволяє розв'язувати задачу з декількома неоднорідностями.

Збільшенню кількості тіл, що враховуються в розрахунковій моделі, присвячені роботи [26–28]. Причому в роботі [26] розглядається ситуація, коли для двох тіл (шар і півпростір) використовуються декартові системи координат, для неоднорідності – циліндрична. Задачі, в яких шар закріплено на двох опорах, розв'язуються в [27], а для шару з двома циліндричними включеннями, що має змішані крайові умови, – [28]. Однак застосований в роботах [26–28] підхід не дозволяє враховувати включення у вигляді товстостінної труби. Підхід, що враховує товстостінні труби, реалізований в роботах [29, 30], де розглядається шар з однієї товстостінною трубою. Даний підхід, як сказано вище, дозволяє більш точно промодельовати саму опору й умови закріплення на ній, але недоліком цих робіт є, як і для робіт [23–25], відсутність формул переходу між циліндричними системами координат, в яких точки початку координат не співпадають. Застосування таких формул і розгляд задач, де опори промодельовані у вигляді декількох труб, є предметом цього дослідження.

Постановка задачі

Модель являє собою композит у вигляді пружного шару з двома циліндричними товстостінними трубами, розташованими паралельно його межам (рис. 1).

Граничні умови представлено у вигляді напружень на плоских поверхнях шару і внутрішніх поверхнях труб. Зовнішні радіуси труб позначено R_p , а внутрішні \tilde{R}_p , де p – номер труби. Шар розглядався у декартовій системі координат (x, y, z) , труби – у локальних циліндричних системах координат (ρ_p, φ_p, z) . Відстань до меж шару $y=h$ та $y=-\tilde{h}$.

Для розв'язання задачі необхідно знайти розв'язок рівнянь Ламе у вигляді

$$\Delta \bar{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \bar{u} = 0.$$

На верхній та нижній межах шару, а також на внутрішніх поверхнях труб задані напруження $F\bar{U}(x, z)|_{y=h} = \bar{F}_h^0(x, z)$, $F\bar{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \bar{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, $F\bar{U}(\rho_p, z)|_{\rho_p=R_p} = F\bar{U}_0^{(p)}(\rho_p, z)$ відповідно,

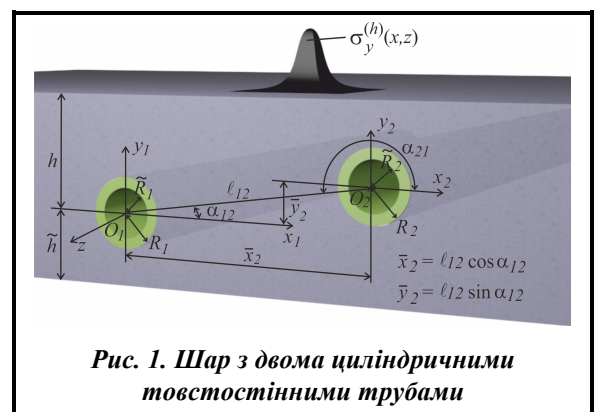


Рис. 1. Шар з двома циліндричними товстостінними трубами

де \vec{U} – переміщення в шарі; $F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right]$ – оператор напруження;

$$\begin{aligned} \vec{F}_h^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z, \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z, \quad \text{– відомі функції.} \\ F\vec{U}_0^{(p)}(\varphi_p, z) &= \sigma_\rho^{(p)} \vec{e}_\rho + \tau_{\rho\varphi}^{(p)} \vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z}^{(p)} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (1)$$

Шар жорстко поєднаний з кожною трубою, де виконуються умови спряження

$$\vec{U}_0(\varphi, z)|_{\rho=R_p} = \vec{U}_p(\varphi, z)|_{\rho=R_p}, \quad (2)$$

$$F\vec{U}_0(\varphi, z)|_{\rho=R_p} = F\vec{U}_p(\varphi, z)|_{\rho=R_p}, \quad (3)$$

де $\vec{U}_0(\varphi, z)$ – розв'язок для шару; $\vec{U}_p(\varphi, z)$ – розв'язок для труби.

Усі задані функції будемо вважати швидкоспадаючими від початку координат по осі z і осі x .

Метод розв'язання

Під час розв'язання задачі переміщення в шарі було представлено у вигляді, запропонованому в роботі [28]

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 &= \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Вид функції переміщень у трубах у було представлено у вигляді запропонованому в роботі [30]

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) d\lambda, \\ \vec{U}_2 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_2, \varphi_2, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_2, \varphi_2, z; \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ – невідомі функції, які необхідно знайти з крайових умов (1).

Базисні розв'язки рівняння Ламе $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ представлено у вигляді [18]

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}; \\ \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right]; \quad k = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\nu - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); \quad N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\nu - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

У результаті отримано нескінчену систему інтегро-алгебраїчних рівнянь, яка має 8 невідомих. Чотири рівняння цієї системи отримано із граничних умов (1) і ще чотири – з умов спряження між

шаром і трубами (2) і (3). Відомі функції (1) попередньо представлені через подвійний інтеграл Фур'є для шару, а для внутрішніх поверхонь труб – через ряд та інтеграл Фур'є. Після цього права та ліва частини рівнянь звільнені від інтегралів і рядів Фур'є. З огляду на те, що означені рівняння представлено в різних системах координат, то для приведення їх до однієї системи координат було використано формули переходу між базисними розв'язками [18]:

– від зовнішніх розв'язків для циліндра $\bar{S}_{k,m}$ до розв'язків для шару $\bar{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\bar{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3; \\ \bar{S}_{2,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \bar{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm 4\mu(1-\sigma)\bar{u}_3^{(\mp)} \right) \cdot \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– від розв'язків шару $\bar{u}_k^{(+)}$ та $\bar{u}_k^{(-)}$ до внутрішніх розв'язків циліндру $\bar{R}_{k,m}$

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad (k=1, 3); \\ \bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma)\bar{R}_{3,m} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

де $\bar{R}_{k,m} = \tilde{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi_p + \lambda z)}$; $\tilde{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_\varphi \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right)$;

$\tilde{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot [(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho)] + \bar{e}_\varphi i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda \rho I'_n(\lambda\rho)$;

$\tilde{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_\varphi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right]$; $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

– від розв'язків циліндру з номером p до розв'язків циліндру з номером q

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, \quad k=1, 2, 3; \\ \bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \\ \bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \tilde{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq})] \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{pq} , $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Таким чином, після використання формул переходу базисних розв'язків між системами координат (6)–(8) кожне рівняння було записано у своїй локальній системі координат. У результаті перетворень отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, до якої застосовано метод редукції. Виконання граничних умов при чисельному дослідженні показало високу точність і збіжність результатів під час її розв'язання.

Чисельні дослідження напруженого стану

Пружний ізотропний шар має дві товстостінні циліндричні труби із зовнішнім радіусом $R_1=R_2=16$ мм, внутрішнім $\tilde{R}_1=\tilde{R}_2=11$ мм (рис. 1). Фізичні характеристики шару: алюмінієвий сплав

Д16Т, коефіцієнт Пуассона $\nu_0=0,3$, модуль пружності $E_0=7,1 \times 10^4$ МПа. Фізичні характеристики труб: сталь ШХ15, коефіцієнт Пуассона $\nu_0=0,28$, модуль пружності $E_0=2,16 \times 10^5$ МПа. Геометричні параметри моделі: $h=\tilde{h}=32$ мм, $\alpha_{12}=0$. Відстань між трубами обрана у двох варіантах: $l_{12}=50$ мм та $l_{12}=100$ мм.

На верхній і нижній межах шару задані нормальні напруження у вигляді одиначної хвилі

$$\sigma_y^{(h)}(x, z) = \sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot \left(\left(x - \frac{\ell_{12}}{2} \right)^2 + 10^2 \right)^{-2} \quad \text{і} \quad \text{нульові} \quad \text{дотичні} \quad \text{напруження}$$

$$\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0. \quad \text{На внутрішніх поверхнях труб задані нульові напруження} \quad \sigma_\rho^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(p)} = 0.$$

Нескінчена система була зрізана по параметру $m=5$ (кількість членів ряду Фур'є і порядок системи рівнянь).

Точність виконання граничних умов при зазначених m і заданих геометричних параметрах становить не менше ніж 10^{-5} при значеннях від 0 до 1.

На рис. 2 представлені напруження σ_ϕ на внутрішній поверхні лівої труби залежно від відстані між трубами.

Графік напруження σ_ϕ (рис. 2) показує зворотну залежність величини напружень від відстані між опорами, тобто при зменшенні відстані між включеннями напруження зростають. Також при кутах, близьких до $\phi=\pi/3$ та $\phi=2\pi/3$, на графіках для відстані між трубами $l_{12}=50$ мм спостерігається явно виражений максимум додатних напружень, який при збільшенні відстані відсутній. Максимальні напруження є від'ємними при $\phi=0$ та дорівнюють $\sigma_{\phi(\max)}=0,5069$ МПа.

Крім того, з порівнянь графіків окружних напружень (рис. 2) при $l_{12}=50$ мм, і при $l_{12}=100$ мм видно, що залежно від відстані між трубами змінюються не тільки значення напружень, а й характер епюри, причому знак напружень може мінятися на протилежний.

На рис. 3 представлені напруження σ_z на внутрішній поверхні лівої труби залежно від відстані між трубами.

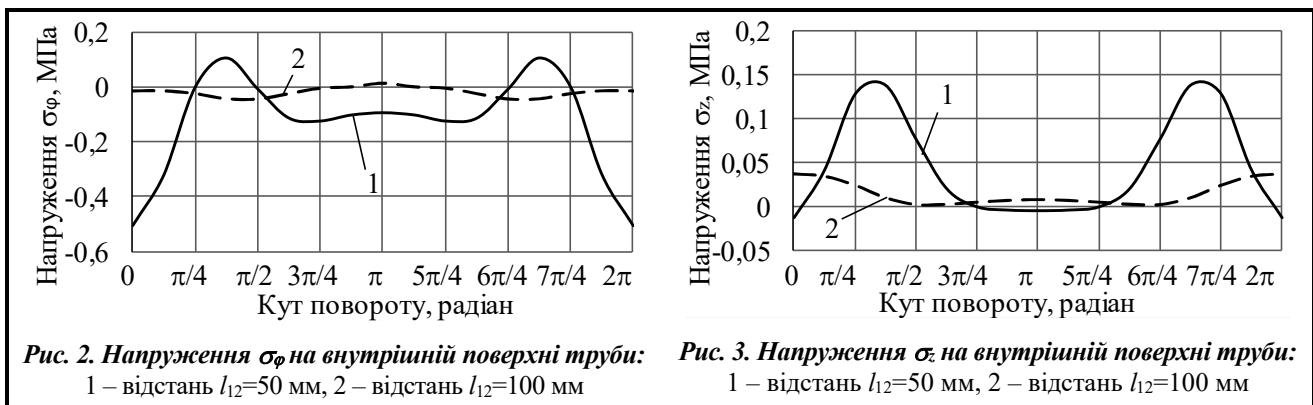
Напруження σ_z на внутрішній поверхні труби (рис. 3), як і напруження σ_ϕ (рис. 2), мають зворотну залежність величини напружень від відстані між опорами. При кутах, близьких до $\phi=\pi/3$, $\phi=2\pi/3$, та при відстані між трубами $l_{12}=50$ мм спостерігаються явно максимальні значення напружень σ_z , які при збільшенні відстані значно зменшуються, а максимальні напруження при цьому зміщуються до $\phi=0$.

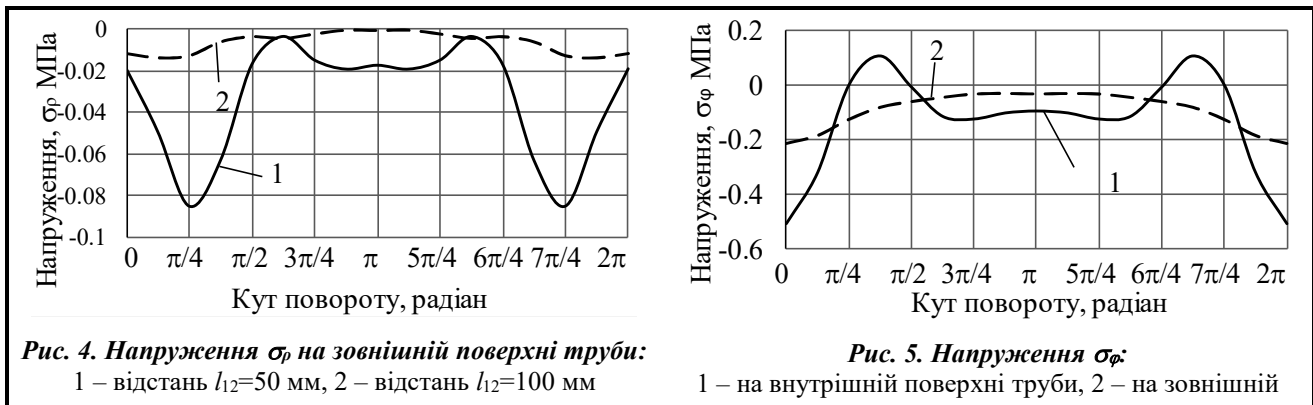
На межі спряження напруження σ_z затухають.

На рис. 4 представлені напруження σ_ρ на спряженні між трубою ($p=1$) і шаром (у тілі труби) залежно від відстані між трубами.

На внутрішній поверхні труби напруження σ_ρ задані рівними нулю. Проте зовнішня поверхня труби (поверхня спряження) стиснута і ці напруження значно зростають. Стискання на поверхні спряження є фізично коректним, оскільки шар стискається навантаженнями на верхній і нижній межах шару.

При збільшенні відстані між трубами на поверхні спряження напруження σ_ρ суттєво спадають. Максимальні стискаючі напруження при $l_{12}=50$ мм дорівнюють $\sigma_\rho=-0,084$ МПа (рис. 4), при $l_{12}=100$ мм – $\sigma_\rho=-0,013$ МПа.





Напруження σ_ϕ при $l_{12}=50$ мм на внутрішній та зовнішній поверхнях труби $p=1$ представлені на рис. 5.

Порівнюючи напруження σ_ϕ на внутрішній і зовнішній поверхнях труби (рис. 5), можна зробити висновок, що на відміну від напруження σ_r , напруження σ_ϕ зменшуються на межі спряження (у тілі труби). Також ці напруження стають постійно стиснуті.

На поверхні спряження (у тілі труби) при $l_{12}=100$ мм характер розподілу напруження σ_ϕ залишається схожим, зображеному на рис. 5, але з меншими значеннями.

Висновки

Створено аналітико-числовий метод розв'язання задачі для шару з двома товстостінними трубами при заданих на поверхнях шару і внутрішніх поверхнях труб напруженнях. У задачі враховані умови спряження шару й труб – жорстке з'єднання, при якому переміщення та напруження уздовж поверхні з'єднання в шарі дорівнюють, відповідно, переміщенням та напруженням в трубах.

Вперше в аналітичному вигляді записаний розв'язок для шару з циліндричними трубами.

Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що допускає застосування до неї методу редукції, після чого вона була розв'язана за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур'є. Це дало змогу отримати розв'язок задачі із заданою точністю.

Виконано числовий аналіз напруженого стану з варіацією відстані між трубами. Отримані графіки розподілення внутрішніх напружень у трубах і шарі. Результати показують зворотну залежність між величиною напружень і відстанню між трубами: при збільшенні відстані величина напружень зменшується. Причому, крім величини, можливі зміни в характері епюр і знаку напружень.

Запропонований метод розв'язання дає можливість отримувати результати напружено-деформованого стану для більшості труб, а також оцінювати вплив геометричних параметрів на величини й розподілення напружень у конструкціях, які можуть бути представлені у вигляді моделей, подібних розглянутій.

У подальшому при вивченні означеної теми необхідно розглянути моделі, де труби комбінуються з іншими типами неоднорідностей (порожнини, опори та ін.).

Література

1. Aitharaju V., Aashat S., Kia H., Satyanarayana A., Bogert P. Progressive damage modeling of notched composites. NASA Technical Reports Server. 2016. <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160012242.pdf>.
2. Kondratiev A. V., Gaidachuk V. E., Kharchenko M. E. Relationships between the ultimate strengths of polymer composites in static bending, compression, and tension. *Mechanics of Composite Materials*. 2019. Vol. 55. Iss. 2. P. 259–266. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09808-x>.
3. Tekkaya A. E., Soyarslan C. Finite element method. In: Laperrière L., Reinhart G. (eds) CIRP Encyclopedia of Production Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699.
4. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation>.
5. Засовенко А. В., Фасоляк А. В. Математичне моделювання динаміки пружного півпростору з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою, при осесиметричних навантаженнях. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2023. № 2. С. 67–73. <https://doi.org/10.15588/1607-6885-2023-2-10>.

6. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
7. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
8. Smetankina N., Kurenov S., Barakhov K. Dynamic stresses in the adhesive joint. The Goland-Reissner model. In: Cioboată D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2023. ICoRSE 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2023. Vol. 762. P. 456–468. https://doi.org/10.1007/978-3-031-40628-7_38.
9. Ugrimov S., Smetankina N., Kravchenko O., Yareshchenko V., Kruszka L. A study of the dynamic response of materials and multilayer structures to shock loads. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 304–313. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_31.
10. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Misura S., Misiura Ie. Modelling thermal stresses in laminated aircraft elements of a complex form with account of heat sources. In: Cioboată D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2022. ICoRSE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2023. Vol. 534. P. 233–246. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22.
11. Smetankina N., Kravchenko I., Merkulov V., Ivchenko D., Malykhina A. Modelling of bird strike on an aircraft glazing. In book: Nechyporuk M., Pavlikov V., Kritskiy D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer, 2020. Vol. 1113. P. 289–297. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_25.
12. Fesenko A., Vaysfel'd N. The wave field of a layer with a cylindrical cavity. In: Gdoutos, E. (eds) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Structural Integrity*. Cham: Springer, 2019. Vol. 8. P. 277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.
13. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 2021. Vol. 33. P. 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.
14. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2022. Vol. 304. Part 2. Article 116403. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.
15. Malits P. Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021. Vol. 89. Article 104308. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308>.
16. Khechai A., Belarbi M.-O., Bouaziz A., Reki F. M. L. A general analytical solution of stresses around circular holes in functionally graded plates under various in-plane loading conditions. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234. P. 671–691. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03413-1>.
17. Snitser A. R. The reissner-sagoci problem for a multilayer base with a cylindrical cavity. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. Vol. 82. Iss. 3. P. 3439–3443. <https://doi.org/10.1007/bf02362661>.
18. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
19. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P. 148–158. <https://doi.org/10.1134/S1995423915020068>.
20. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. P. 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/S0021894416060237>.
21. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. P. 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.
22. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сферoidalной полостью. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2012. Вып. 20. С. 253–259.
23. Ukrayinets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 2. No. 7 (110). P. 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.
24. Мірошніков В. Ю., Денисова Т. В., Проценко В. С. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 103. С. 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.
25. Miroshnikov V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413>.

26. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress state of a composite in the form of a layer and a half space with a longitudinal cylindrical cavity at stresses given on boundary surfaces. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 4. P. 24–31. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.024>.
27. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Demenko V. F. Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. No. 1. P. 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>.
28. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Pohrebniak O. A. Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical elastic inclusions and mixed boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2022. Vol. 25. No. 2. P. 22–29. <https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022>.
29. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress strain state of the layer with a longitudinal cylindrical thick-walled tube and the displacements given at the boundaries of the layer. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 2. P. 44–52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>.
30. Miroshnikov V. Rotation of the layer with the cylindrical pipe around the rigid cylinder. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32.

Надійшла до редакції 31.05.2024