УДК 534.1

АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ КОЛИВАННЯ КОМПОЗИТНОЇ САНДВІЧ-КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ВИГОТОВЛЕНОЇ АДИТИВНИМИ ТЕХНОЛОГІЯМИ

[1] **К. В. Аврамов**, член-кор. НАН України
kvavramov@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-8740-693X

[1] **Б. В. Успенський**, канд. техн. наук
Uspensky.kubes@gmail.com,
ORCID: 0000-0001-6360-7430

[2] **Б. Г. Любарський**, д-р техн. наук
ORCID: 0000-0002-2985-7345

[2] **О. А. Смецьких**
ORCID: 0009-0005-0238-9712

[1] Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України,
61046, Україна, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10

[2] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
61002, Україна, м. Харків, вул. Кирпичова, 2

Сандвіч-конічна оболонка з пружним стільниковим заповнювачем, що досліджується в цій роботі, виготовляється адитивними технологіями та має три шари. Стільниковий заповнювач виробляється із матеріалу ULTEM, а горішні й долішні лицеві шари конструкцій – із вуглепластику. Кожен шар конструкцій є ортотропним матеріалом і задовольняє закону Гука. Завдяки процедурі гомогенізації, яка використовує метод скінчених елементів, замість стільникового заповнювача отримаємо еквівалентне ортотропне середовище. Пружні властивості цього середовища задовольняють закону Гука. Модифікована теорія зсуву високого порядку застосовується для моделювання деформування конструкцій. Деформування кожного шару конструкцій описуються п'ятьма змінними, до яких відносять три проєкції переміщень серединної поверхні і два кута повороту нормалі до серединної поверхні. Для розрахунку переміщень шарів використовуються граничні умови для напружень і граничні умови, які описують неперервність переміщень на межах шарів. Коливання тришарової сандвіч-оболонки розкладаються по базисних функціях, які задовольняють кінематичним граничним умовам. Для дослідження коливань використовується метод Релея-Рітца. Параметри коливань конструкцій розраховуються із проблеми власних значень. Для верифікацій отриманих результатів власні частоти порівнюються з даними скінчено елементного моделювання. Як випливає із розрахунків, власні частоти, отримані методом Релея-Рітца й методом скінченних елементів, близькі. Спектр власних частот дуже щільний. Мінімальна власна частота коливань спостерігається при числі хвиль у коловому напрямку рівнім одиниці.

***Ключові слова**: сандвіч-конічна оболонка, стільниковий заповнювач, лінійні коливання.*

Вступ

Стільникові сандвіч тонкостінні конструкцій використовуються в літальних апаратах, ракетоносіях тощо. Вони при малій вазі мають високу міцність і жорсткість. Багато зусиль було докладено до дослідження механічних властивостей сандвіч-конструкцій. Нелінійні коливання композитної оболонки подвійної кривини з пружнім середнім шаром і магнето реологічним шаром досліджуються в [1]. Нелінійні коливання композитної подвійної кривини сандвіч-оболонки з п'єзоелектричним шаром вивчаються в [2]. Для отримання математичної моделі використовується теорія зсуву високого порядку й геометрично нелінійна теорія деформування вон Кармана. Нелінійна динамічна поведінка сандвіч-оболонки подвійної кривини із ауксетичним стільниковим заповнювачем із негативним коефіцієнтом Пуассона досліджується в [3], а геометрично нелінійні коливання замкненої циліндричної сандвіч-оболонки – у [4]. Нелінійні коливання циліндричної панелі на пружному фундаменті під дією ударного навантаження досліджується в [5]. Горішні й долішні шари виготовлені із нанокомпозита, а сандвіч-панель – з ауксетичного стільникового заповнювача й лицевих шарів із нанокомпозіта.

Нелінійні рівняння рухів сандвіч-оболонки подвійної кривини із стільниковими заповнювачами під дією поперечного навантаження виводяться за допомогою варіаційного принципу Гамільтона й теорії зсуву Редді третього порядку [6]. Нелінійні коливання багатошарової композитної оболонки в гідротермальному середовище розглядаються в [7]. Нелінійний скінчено-елементний підхід застосовується для аналізу геометрично нелінійних коливань сандвіч-пластин із функціонально градієнтним стільниковим заповнювачем [8]. Геометрично нелінійні вимушені коливання прямокутної сандвіч-панелі із стільниковим заповнювачем описуються системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, які вирішуються методом гомотопії [9]. Метод гомогенізацій використовується для аналізу геометрично нелінійних коливань сандвіч-панелей в [10].

У цій роботі досліджуються лінійні коливання сандвіч-конічної оболонки із стільниковим заповнювачем, виготовленим за допомогою адитивних технологій, а також із горішнім і долішнім шарами із вуглепластику. Напружений стан кожного шару описується п’ятьма змінними, до яких належать три проєкції переміщень серединних поверхонь кожного шару і два кута повороту нормалі до серединних поверхонь кожного шару. Для отримання рівнянь коливань конструкцій використовується теорія зсуву високого порядку й умови неперервності переміщень між шарами. За допомогою методу Релея-Рітца аналіз лінійних коливань зводиться до проблеми власних значень, із якої отримуються параметри лінійних коливань багатошарової конструкцій. Досліджено властивості лінійних коливань.

Формулювання проблеми й основні рівняння

Тришарова сандвіч-конічна оболонка зображена на рис. 1. Середній шар цієї оболонки – стільниковий заповнювач, який виготовлюється за допомогою адитивної технології з матеріалу ULTEM 9085. Горішні й долішні шари виробляються із вуглепластику. Матеріал всіх трьох шарів є ортотропним і задовольняє закону Гука.

Для опису деформування кожного шару використовуються три криволінійні системи координат: (s_t, θ, z_t), (s_c, θ, z_c), (s_b, θ, z_b), де θ – колова координата; z_t, z_c, z_b – поперечні координати; s_t, s_c, s_b – поздовжні координати.

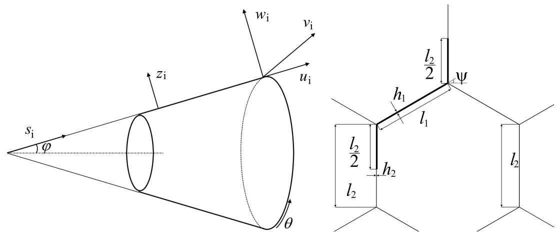

Рис. 1. Сандвіч-конічна оболонка (а) і комірка стільникового заповнювача (б)

Завдяки застосуванню процедури гомогенізації [11] отримаємо еквівалентне ортотропне середовище замість стільникового заповнювача. Закон Гука для цього середовища має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{ss}^{(c)}\\ \sigma_{\theta\theta}^{(c)}\\ \sigma_{zz}^{(c)}\\ \sigma_{\theta z}^{(c)}\\ \sigma_{sz}^{(c)}\\ \sigma_{s\theta}^{(c)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{ss}^{(c)}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)}\\ \varepsilon_{zz}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{sz}^{(c)}\\ 2\varepsilon_{s\theta}^{(c)}\end{bmatrix}, \tag{1}$$

де $\sigma_{ss}^{(c)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(c)}$, $\sigma_{zz}^{(c)}$, $\sigma_{\theta z}^{(c)}$, $\sigma_{sz}^{(c)}$, $\sigma_{s\theta}^{(c)}$, $\varepsilon_{ss}^{(c)}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)}$, $\varepsilon_{zz}^{(c)}$, $\varepsilon_{\theta z}^{(c)}$, $\varepsilon_{sz}^{(c)}$, $\varepsilon_{s\theta}^{(c)}$ – елементи тензорів напружень і деформацій. Горішні й долішні лицеві шари виготовляються із вуглепластикового композит. Закон Гука в даному випадку набуває наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{ss}^{(j)}\\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{C}_{11} & \overline{C}_{21}\\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{ss}^{(j)}\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)}\end{bmatrix};$$

$$\sigma_{s\theta}^{(j)}=2\overline{C}_{33}\varepsilon_{s\theta}^{(j)};\quad \sigma_{sz}^{(j)}=2\overline{C}_{44}\varepsilon_{sz}^{(j)};\quad \sigma_{\theta z}^{(j)}=2\overline{C}_{55}\varepsilon_{\theta z}^{(j)};\ j=b,\ t.$$

Переміщення горішніх і долішніх шарів $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$, $u_3^{(i)}$ ($i=t, b$) розкладаються так:

$$u_1^{(c)}=u^{(i)}+z_i\varphi_1^{(i)}+z_i^2\psi_1^{(i)};$$

$$u_2^{(c)}=\left(1+\frac{z_i}{\left(s_i^{(1)}+\xi\right)\tan\varphi}\right)v^{(i)}+z_i\varphi_2^{(i)}+z_i^2\psi_2^{(i)};\quad u_3^{(c)}=w^{(i)};\quad i=t,\ b, \tag{2}$$

де $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $w^{(i)}$ – проєкції переміщень точок серединної поверхні шарів; $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_2^{(i)}$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні; $\psi_1^{(i)}$, $\psi_2^{(i)}$ – невідомі функції, що розраховуються. Проєкції переміщень гомогенізованого шару $u_1^{(c)}$, $u_2^{(c)}$, $u_3^{(c)}$ мають вигляд

$$u_1^{(c)}=u^{(c)}+z_c\varphi_1^{(c)}+z_c^2\psi_1^{(c)}+z_c^3\gamma_1^{(c)};$$

$$u_2^{(c)}=\left(1+\frac{z_i}{\left(s_{ic}^{(1)}+\xi\right)\tan\varphi}\right)v^{(c)}+z_c\varphi_2^{(c)}+z_c^2\psi_2^{(c)}+z_c^3\gamma_2^{(c)};$$

$$u_3^{(c)}=w^{(c)}+z_c w_1^{(c)}+z_c^2 w_2^{(c)}, \tag{3}$$

де $u^{(c)}$, $v^{(c)}$, $w^{(c)}$ – проєкції переміщень серединної поверхні гомогенізованого шару; $\varphi_1{}^{(c)}$, $\varphi_2{}^{(c)}$ – кути обертання нормалі до серединної поверхні; $\psi_1{}^{(c)}$, $\psi_2{}^{(c)}$, $\gamma_1{}^{(c)}$, $\gamma_2{}^{(c)}$, $w_1{}^{(c)}$, $w_2{}^{(c)}$ – невідомі функції, що розраховуються.

Граничні умови для напружень горішніх і долішніх шарів використовуються у вигляді

$$\sigma_{sz}\big|_{z_t=0.5h_t}=\sigma_{\theta z}\big|_{z_t=0.5h_t}=0;\quad \sigma_{sz}\big|_{z_b=-0.5h_b}=\sigma_{\theta z}\big|_{z_b=-0.5h_b}=0, \tag{4}$$

де h_t, h_b – товщини долішніх і горішніх шарів. Неперервність переміщень на межах шарів описується наступними граничними умовами:

$$u_t(z_t=-0.5h_t)=u_c(z_c=0.5h_c);\quad v_t(z_t=-0.5h_t)=v_c(z_c=0.5h_c);$$

$$w_t(z_t=-0.5h_t)=w_c(z_c=0.5h_c);\quad u_b(z_b=0.5h_b)=u_c(z_c=-0.5h_c);$$

$$v_b(z_b=0.5h_b)=v_c(z_c=-0.5h_c);\quad w_b(z_b=0.5h_b)=w_c(z_c=-0.5h_c), \tag{5}$$

де h_c – товщина гомогенізованого шару.

Параметри розкладень (2, 3) знаходяться із граничних умов (4, 5) наступним чином:

$$\psi_1^{(c)}=-\frac{1}{h_t}\left(\varphi_1^{(t)}+\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\xi}\right);\quad \psi_2^{(c)}=-\frac{1}{h_t f_1(\xi)}\left(\varphi_2^{(t)}+\frac{1}{\left(s_t^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\theta}\right);$$

$$\psi_1^{(b)}=-\frac{1}{h_b}\left(\varphi_1^{(b)}+\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\xi}\right);\quad \psi_2^{(b)}=-\frac{1}{h_b f_2(\xi)}\left(\varphi_2^{(b)}+\frac{1}{\left(s_b^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\theta}\right);$$

$$\psi_1^{(c)}=\frac{2}{h_c^2}\left\{u^{(t)}+u^{(b)}-2u^{(c)}+0.75h_b\varphi_1^{(b)}-0.75h_t\varphi_1^{(t)}+\frac{h_b}{4}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\xi}-\frac{h_t}{4}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\xi}\right\};$$

$$\gamma_1^{(c)}=\frac{4}{h_c^3}\left\{u^{(t)}-u^{(b)}-h_c\varphi_1^{(c)}-0.75h_b\varphi_1^{(b)}-0.75h_t\varphi_1^{(t)}-\frac{h_b}{4}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\xi}-\frac{h_t}{4}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\xi}\right\};$$

$$\psi_2^{(c)}=\frac{2}{h_c^2}\left\{f_3(\xi)v^{(t)}+f_4(\xi)v^{(b)}-\frac{h_t}{2}\left[1+\frac{1}{2f_1(\xi)}\right]\varphi_2^{(t)}+\frac{h_b}{2}\left[1+\frac{1}{2f_2(\xi)}\right]\varphi_2^{(b)}-\right.$$

$$\left.-\frac{h_t}{4f_1(\xi)\left(s_t^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\theta}+\frac{h_b}{4f_2(\xi)\left(s_b^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\theta}-2v^{(c)}\right\};$$

$$\gamma_2^{(c)}=\frac{4}{h_c^3}\left\{f_3(\xi)v^{(t)}-f_4(\xi)v^{(b)}-\frac{h_t}{2}\left[1+\frac{1}{2f_1(\xi)}\right]\varphi_2^{(t)}-\frac{h_b}{2}\left[1+\frac{1}{2f_2(\xi)}\right]\varphi_2^{(b)}-\right.$$

$$\left.-\frac{h_t}{4f_1(\xi)\left(s_t^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi}\frac{\partial w^{(t)}}{\partial\theta}-\frac{h_b}{4f_2(\xi)\left(s_b^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi}\frac{\partial w^{(b)}}{\partial\theta}-\frac{h_c}{\left(s_c^{(1)}+\xi\right)\tan\varphi}v^{(c)}-h_c\varphi_2^{(c)}\right\};$$

$$w_2^{(c)}=\frac{2}{h_c^2}\left(w^{(t)}+w^{(b)}-2w^{(c)}\right);\ w_1^{(c)}=\frac{1}{h_c}\left(w^{(t)}-w^{(b)}\right),$$

де $f_1(\xi)=1+\dfrac{h_t}{4(s_t^{(1)}+\xi)\tan\varphi}$; $f_2(\xi)=1-\dfrac{h_b}{4(s_b^{(1)}+\xi)\tan\varphi}$; $f_3(s_t)=1-\dfrac{h_t}{2(s_t^{(1)}+\xi)\tan\varphi}$; $f_2(s_b)=1+\dfrac{h_b}{2(s_b^{(1)}+\xi)\tan\varphi}$.

Деформації та переміщення задовольняють наступним рівнянням [12]:

$$\varepsilon_{ss}^{(i)}=\frac{1}{1+\dfrac{z_i}{R_s^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial\alpha_2}u_2^{(i)}+\frac{u_3^{(i)}}{R_s^{(i)}}\right);$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}=\frac{1}{1+\dfrac{z_i}{R_\theta^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_\theta^{(i)}}{\partial\alpha_1}u_1^{(i)}+\frac{u_3^{(i)}}{R_\theta^{(i)}}\right);$$

$$\varepsilon_{s\theta}^{(i)}=\frac{1}{1+\dfrac{z_i}{R_s^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_s^{(i)}}{\partial\alpha_2}u_1^{(i)}\right)+\frac{1}{1+\dfrac{z_i}{R_\theta^{(i)}}}\left(\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_s^{(i)}A_\theta^{(i)}}\frac{\partial A_\theta^{(i)}}{\partial\alpha_1}u_2^{(i)}\right);$$

$$\varepsilon_{sz}^{(i)}=\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z_i}+\frac{1}{1+\dfrac{z_i}{R_s^{(i)}}}\left[\frac{1}{A_s^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial\alpha_1}-\frac{u_1^{(i)}}{R_s^{(i)}}\right];\quad \varepsilon_{\theta z}^{(i)}=\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z_i}+\frac{1}{1+\dfrac{z_i}{R_\theta^{(i)}}}\left[\frac{1}{A_\theta^{(i)}}\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial\alpha_2}-\frac{u_2^{(i)}}{R_\theta^{(i)}}\right]; \tag{6}$$

$$i=t,\,c,\,b;\quad \alpha_1\equiv s_i;\quad \alpha_2\equiv\theta.$$

Рівняння (2, 3) вводяться у (6). У результаті отримано наступні асимптотичні розкладення для компонент тензору деформацій:

$$\varepsilon_{ss}^{(i)}=\varepsilon_{s,0}^{(i)}+z_ik_{s,0}^{(i)}+z_i^2k_{s,1}^{(i)}+z_i^3k_{s,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}=\varepsilon_{\theta,0}^{(i)}+z_ik_{\theta,0}^{(i)}+z_i^2k_{\theta,1}^{(i)}+z_i^3k_{\theta,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{s\theta}^{(i)}=\varepsilon_{s\theta,0}^{(i)}+z_ik_{s\theta,0}^{(i)}+z_i^2k_{s\theta,1}^{(i)}+z_i^3k_{s\theta,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{sz}^{(i)}=\varepsilon_{sz,0}^{(i)}+z_ik_{sz,0}^{(i)}+z_i^2k_{sz,1}^{(i)}+z_i^3k_{sz,2}^{(i)};$$

$$\varepsilon_{\theta z}^{(i)}=\varepsilon_{\theta z,0}^{(i)}+z_ik_{\theta z,0}^{(i)}+z_i^2k_{\theta z,1}^{(i)}+z_i^3k_{\theta z,2}^{(i)};\quad i=t,\,c,\,b;$$

$$\varepsilon_{zz}^{(c)}=\varepsilon_{z,0}^{(c)}+z_ck_{z,0}^{(c)},$$

де величини компонент розкладень не наводяться для стислості викладання.

Потенціальна енергія горішніх і долішніх шарів має наступний вигляд:

$$U_i=0.5\int_{\overline{V}_i}\left(\sigma_{ss}^{(i)}\varepsilon_{ss}^{(i)}+\sigma_{\theta\theta}^{(i)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}+\sigma_{\theta z}^{(i)}\varepsilon_{\theta z}^{(i)}+\sigma_{sz}^{(i)}\varepsilon_{sz}^{(i)}+\sigma_{s\theta}^{(i)}\varepsilon_{s\theta}^{(i)}\right)\left(1+\frac{z_i}{(s_i^{(1)}+\xi)\tan\varphi}\right)\left(s_i^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi\cdot d\xi\cdot d\theta\cdot dz_i=$$

$$=0.5\int_{\overline{V}_i}\left(\overline{C}_{11}\varepsilon_{ss}^{(i)2}+\overline{C}_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)2}+2\overline{C}_{12}\varepsilon_{ss}^{(i)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}+2\overline{C}_{55}\varepsilon_{\theta z}^{(i)2}+2\overline{C}_{44}\varepsilon_{sz}^{(i)2}+2\overline{C}_{33}\varepsilon_{s\theta}^{(i)2}\right)\left(1+\frac{z_i}{(s_i^{(1)}+\xi)\tan\varphi}\right)\left(s_i^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi\cdot d\xi\cdot d\theta\cdot dz_i;$$

$$i=t,\,b, \tag{7}$$

де $\overline{V}_i$ – об’єм шару i; A_i – площина серединної поверхні шару.

Потенційна енергія гомогенізованого шару має наступний вигляд:

$$U_c = 0.5\int\limits_{\bar V_c}\left(\sigma_{ss}^{(c)}\varepsilon_{ss}^{(c)}+\sigma_{\theta\theta}^{(c)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)}+\sigma_{zz}^{(c)}\varepsilon_{zz}^{(c)}+\sigma_{\theta z}^{(c)}\varepsilon_{\theta z}^{(c)}+\sigma_{sz}^{(c)}\varepsilon_{sz}^{(c)}+\sigma_{s\theta}^{(c)}\varepsilon_{s\theta}^{(c)}\right)\left(1+\frac{z_c}{(s_c^{(1)}+\xi)\tan\varphi}\right)\left(s_c^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi\cdot d\xi\cdot d\theta\cdot dz_c =$$

$$=0.5\int\limits_{\bar V_i}\left(C_{11}\varepsilon_{ss}^{(c)2}+C_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)2}+C_{33}\varepsilon_{zz}^{(c)2}+2C_{12}\varepsilon_{ss}^{(i)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}+2C_{13}\varepsilon_{ss}^{(c)}\varepsilon_{zz}^{(c)}+2C_{23}\varepsilon_{\theta\theta}^{(c)}\varepsilon_{zz}^{(c)}+2C_{44}\varepsilon_{\theta z}^{(i)2}+2C_{55}\varepsilon_{sz}^{(i)2}+2C_{66}\varepsilon_{s\theta}^{(i)2}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{z_c}{(s_c^{(1)}+\xi)\tan\varphi}\right)\left(s_c^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi\cdot d\xi\cdot d\theta\cdot dz_c\,. \tag{8}$$

Кінетичну енергію шарів оболонки представимо у вигляді

$$T_i = 0.5\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{s_i^{(1)}}^{s_i^{(2)}}\int\limits_{-0.5h_i}^{0.5h_i}\rho_i\left(\dot u_1^{(i)2}+\dot u_2^{(i)2}+\dot u_3^{(i)2}\right)\left(1+\frac{z_i}{(s_i^{(1)}+\xi)\tan\varphi}\right)\left(s_i^{(1)}+\xi\right)\sin\varphi\cdot d\theta\cdot d\xi\cdot dz_i\,;\ i=t,\,c,\,b, \tag{9}$$

де ρ_i – густина матеріалів шарів; $\dot u_1^{(i)}=\dfrac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t}$.

Аналіз лінійних коливань

Для аналізу лінійних коливань тонкостінної конструкції використовується метод Релея-Рітца. У даному разі силові граничні умови конструкцій не беруться до уваги. Однак кінематичні граничні умови обов'язково враховуються. Защемлена з обох кінців конічна оболонка має наступні граничні умови:

$$w^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(1)}}=v^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(1)}}=u^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(1)}}=\varphi_1^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(1)}}=\varphi_2^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(1)}}=0\,;$$

$$w^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(2)}}=v^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(2)}}=u^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(2)}}=\varphi_1^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(2)}}=\varphi_2^{(i)}\Big|_{s_i=s_i^{(2)}}=0\,;\ i=t,\,c,\,b. \tag{10}$$

Коливання тонкостінної конструкцій мають наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix}u^{(i)}\\ v^{(i)}\\ w^{(i)}\\ \varphi_1^{(i)}\\ \varphi_2^{(i)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_i(\xi)\cos(n\theta)\\ V_i(\xi)\sin(n\theta)\\ W_i(\xi)\cos(n\theta)\\ X_i(\xi)\cos(n\theta)\\ Y_i(\xi)\sin(n\theta)\end{bmatrix}\cos(\omega t)\,,\ i=t,\,c,\,b, \tag{11}$$

де n – число колових хвиль. Функції $U_i(\xi)$, $V_i(\xi)$, $W_i(\xi)$, $X_i(\xi)$, $Y_i(\xi)$ (11) задовольняють граничним умовам (10). Вони мають наступний вигляд:

$$U_i(\xi)=\sum_{m=1}^{N_u}U_m^{(i)}\Psi_m^{(U)}(\xi)\,;\quad V_i(\xi)=\sum_{m=1}^{N_v}V_m^{(i)}\Psi_m^{(V)}(\xi)\,;\quad W_i(\xi)=\sum_{m=1}^{N_w}W_m^{(i)}\Psi_m^{(W)}(\xi)\,;$$

$$X_i(\xi)=\sum_{m=1}^{N_x}X_m^{(i)}\Psi_m^{(X)}(\xi)\,;\quad Y_i(\xi)=\sum_{m=1}^{N_y}Y_m^{(i)}\Psi_m^{(Y)}(\xi)\,, \tag{12}$$

де $\Psi_m^{(U)}(\xi)$, $\Psi_m^{(V)}(\xi)$, $\Psi_m^{(W)}(\xi)$, $\Psi_m^{(X)}(\xi)$, $\Psi_m^{(Y)}(\xi)$ – базисні функції; $U_m^{(i)}$, $V_m^{(i)}$, $W_m^{(i)}$, $X_m^{(i)}$, $Y_m^{(i)}$ – невідомі параметри, які будуть розраховані.

Потенційна енергія сандвіч-оболонки U_Σ має наступний вигляд

$$U_\Sigma = U_t + U_c + U_b\,.$$

Кінетична енергія тонкостінної конструкцій представимо у вигляді

$$T_\Sigma = T_t + T_c + T_b\,.$$

Для дослідження лінійних коливань використаємо принцип Гамільтона

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega}(U_\Sigma - T_\Sigma)\,dt \to \min\,. \tag{13}$$

Рівняння (11, 12) використовуються в енергіях (7–9) і розраховуються подвійні інтеграли. У результаті отримаємо

$$U_{\Sigma} = \widetilde{U}(A)\cos^2(\omega t)\,;\; T_{\Sigma} = \omega^2 \widetilde{T}(A)\sin^2(\omega t)\,, \tag{14}$$

де $A = \left(U_1^{(t)},...,U_{N_u}^{(t)},U_1^{(c)},...,Y_{N_Y}^{(b)}\right)$ – вектор невідомих. Розмірність цього вектора $N_* = 3(N_u + N_v + N_w + N_X + N_Y)$. Функції $\widetilde{U}(A)$, $\widetilde{T}(A)$ є квадратичною формою відносно елементів вектора A. Рівняння (14) використовуються у (13). З огляду на це отримаємо

$$\widetilde{U}(A) - \omega^2 \widetilde{T}(A) \to \min\,. \tag{15}$$

Умова (15) перетворюються на систему N_* алгебричних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial A_j}\left[\widetilde{U}(A) - \omega^2 \widetilde{T}(A)\right] = 0\,;\; j=1,\,\ldots,\,N_*. \tag{16}$$

Рівняння (16) перетворюються на проблему власних значень, з якої знаходяться власні частоти й форми коливань.

Результати чисельних моделювань

Затиснена з обох країв оболонка

У цьому розділі розглядається затиснена з обох країв оболонка. Граничні умови мають вигляд (10). Тоді базисні функцій розкладів (12) наступні:

$$\Psi_m^{(U)}(\xi) = \Psi_m^{(V)}(\xi) = \Psi_m^{(W)}(\xi) = \Psi_m^{(X)}(\xi) = \Psi_m^{(Y)}(\xi) = \sin\left[\frac{m\pi\xi}{L}\right].$$

Стільниковий заповнювач виготовляється адитивними технологіями FDM з матеріалу ULTEM 9085. Механічні характеристики цього матеріалу визначалися експериментально. Стільниковий заповнювач (рис. 1, б) заміняється гомогенізованим ортотропним суцільним середовищем. Для розрахунків механічних властивостей використовується метод скінченних елементів [11].

Геометричні параметри комірок стільникового заповнювача наступні:

l_1=6,1054 мм; l_2=3,0527 мм; θ=60°; l_c=10 мм; $\overline{h}_c$=0,4 мм,

де $\overline{h}_c$ – товщина стінки комірки; l_c – висота стільникового заповнювача. Стільниковий заповнювач задовольняє закону Гука (1). Інженерні сталі гомогенізованого ортотропного суцільного середовища мають наступні чисельні значення:

$$E_{11}=2{,}91\text{ МПа};\; E_{22}=2{,}91\text{ МПа};\; E_{33}=215{,}1\text{ МПа};$$
$$\nu_{12}=0{,}972;\; \nu_{23}=0{,}0051;\; \nu_{13}=0{,}0042; \tag{17}$$
$$G_{12}=1{,}118\text{ МПа};\; G_{23}=39{,}1\text{ МПа};\; G_{13}=39{,}1\text{ МПа};\; \rho_c=253{,}189\text{ кг/м}^3.$$

Горішні й долішні лицеві шари виготовлені із вуглепластику. Їх пружні властивості задовольняють закону Гука. Інженерні сталі цього матеріалу такі:

$$E_x=160\times10^9\text{ Па};\; E_y=6{,}8\times10^9\text{ Па};\; \nu_{xy}=0{,}32;\; \nu_{yx}=0{,}0136;$$
$$G_{xy}=800\times10^9\text{ Па};\; G_{xz}=G_{yz}=4\times10^9\text{ Па};\; \rho_t=\rho_b=1400\text{ кг/м}^3. \tag{18}$$

Геометричні параметри конструкцій мають наступні значення: φ=π/12; $s_c^{(1)}$=2,354 м; $s_t^{(1)}$=2,33 м; $s_b^{(1)}$=2,313 м; h_t=h_b=10^{-3} м; h_c=10^{-2} м.

Таблиця 1. Власні частоти затиснутої оболонки

n	N_*	ω, Гц	ω_{FEM}, Гц	δ
1	180	412,84	–	–
	210	412,25	–	–
	270	411,83	421,98	0,0240
2	180	431,29	–	–
	210	430,61	–	–
	240	430,10	438,45	0,019
3	180	449,92	–	–
	210	449,14	–	–
	240	448,56	455,76	0,0150
8	210	451,60	–	–
	240	450,80	–	–
	270	450,22	460,61	0,0220
77	210	452,73	–	–
	240	451,96	–	–
	270	451,41	462,27	0,0230
6	210	458,77	–	–
	240	458,06	–	–
	270	457,54	467,82	0,0220
9	210	459,88	–	–
	240	459,05	–	–
	270	458,46	466,99	0,0180
4	180	461,70	–	–
	210	460,85	–	–
	240	460,24	467,50	0,0150
5	180	464,27	–	–
	210	463.35	–	–
	240	462.71	471,14	0,0180
10	210	479.25	–	–
	240	478.42	482,81	0,0091

Результати розрахунків перших десяти власних частот коливань конструкцій наводяться у табл. 1. Число колових хвиль n наводиться у першому стовбці таблиці, розмір проблеми власних значень– у другому стовбці таблиці. Власні частоти, отримані методом Релєя-Рітца, надані у третьому стовбці. Власні частоти, що розраховувалися методом скінченних елементів в ANSYS, наводяться у четвертому стовбці.

Відносна різниця власних частот δ, отриманих різними методами, представлена у п'ятому стовбці. Для аналізу збіжності власних частот коливань конструкції проблема власних значень розраховувалася з різною розмірністю. Як випливає з розрахунків, власні частоти, отримані різними методами, близькі. Спектр власних частот дуже щільний. Перші десять власних частот спостерігаються в діапазоні $\omega \in [411.83; 478.42]$ Гц. Залежність першої власної частоти від числа колових хвиль показується суцільної кривою на рис. 2. Результати скінчено елементного аналізу показуються пунктирною лінією на рис. 2. Мінімальна власна частота коливань спостерігається при n=1. Мінімальна власна частота ізотропних конічних оболонок спостерігається при значно більших значеннях n [12].

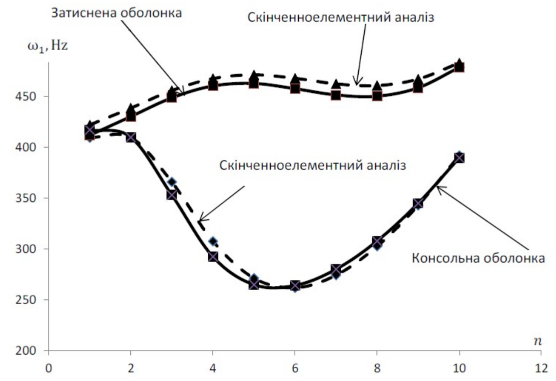

Рис. 2. Залежність першої частоти ω_1 від числа хвиль n

Консольна оболонка

У даному розділі представлені результати чисельного моделювання консольної конічної оболонки. Край оболонки з більшим радіусом затиснутий, а край із меншим радіусом вільний. Для задоволення граничним умовам базисні функції розкладень (12) мають наступний вигляд:

$$\Psi_m^{(U)}(\xi) = \Psi_m^{(V)}(\xi) = \Psi_m^{(W)}(\xi) = \Psi_m^{(X)}(\xi) = \Psi_m^{(Y)}(\xi) = \sin\left[\frac{(2m-1)\pi(L-\xi)}{2L}\right].$$

Механічні характеристики горішніх і долішніх шарів мають значення (18), а механічні характеристики стільникового заповнювача мають вигляд (17).

Власні частоти консольної оболонки наводяться у табл. 2, а її стовбці мають той саме фізичний зміст, що в табл. 1. Як випливає із табл. 2, власні частоти, отримані методом Релея-Рітца й методом скінчених елементів, збігаються. Залежність першої власної частоти від n показується суцільної лінією на рис. 2. Результати скінченно-елементного моделювання наводяться пунктирною лінію. Мінімальна частота коливань спостерігається при n=6. Мінімальна частота затиснутої з двох сторін конічної оболонки спостерігається при n=1.

Лінійні коливання консольної сандвіч оболонки якісно відрізняються від затиснутої з обох кінців конічної сандвіч оболонки, що випливає із результатів розрахунків, які наводяться на рис. 2.

Таблиця 2. Власні частоти коливань консольної оболонки

n	N_*	ω, Гц	ω_{FEM}, Гц	δ
1	210	409,46	417,15	0,018
2	210	409,58	409,90	$7{,}8\times10^{-4}$
3	210	365,95	353,16	0,036
4	210	307,81	292,54	0,050
5	210	271,49	265,06	0,020
6	210	262,10	264,29	0,006
7	210	274,41	280,20	0,020
8	210	302,77	307,97	0,016
9	210	342,96	345,00	0,006
10	210	391,95	389,58	0,006

Висновки

Розглядаються власні коливання сандвіч-конічної оболонки із стільниковим заповнювачем, виготовленим адитивною технологією FDM, і різними граничними умовами. Напружений стан кожного шару описується трьома переміщеннями серединної поверхні цього шару і двома кутами повороту нормалі до серединної поверхні шару. Для моделювання напруженого стану використовується теорія зсуву високого порядку, а для отримання проблеми власних значень, що описує власні коливання конструкції, – метод Релея-Рітца. Коливання тришарової сандвіч-оболонки розкладаються по базисних функціях, які задовольняють кінематичним граничним умовам.

Частина елементі матриці мас близька до нуля внаслідок малої товщини лицевих шарів й малої ваги стільникового заповнювача, що дозволяє скоротити розмірність проблеми власних значень, із яких розраховуються частоти коливань.

Лінійні коливання усіченої сандвіч-конічної оболонки, затиснутої з двох сторін, і консольної оболонки досліджуються чисельно. Мінімальна власна частота затисненої із обох кінців сандвіч-конічної оболонки спостерігається, коли число хвиль у коловим напрямі дорівнює одиниці. Мінімальна власна частота консольної сандвіч-конічної оболонки спостерігається, коли число хвиль у коловим напрямі дорівнює шести.

Результати напіваналітичних розрахунків збігаються з результатами скінченно елементного моделювання в середовище ANSYS.

Фінансування

Вищенаведені результати отримані за проєктом 2023.04/0001, що фінансується Національним фондом досліджень України.

Література

1. Karimiasl M., Ebrahimi F. Large amplitude vibration of viscoelastically damped multiscale composite doubly curved sandwich shell with flexible core and MR layers. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol. 144. Article 106128. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.020.
2. Karimiasl M., Ebrahimi F., Mahesh V. Nonlinear forced vibration of smart multiscale sandwich composite doubly curved porous shell. *Thin-Walled Structures*. 2019. Vol. 143. Article 106152. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.044.
3. Cong P. H., Khanh N. D., Khoa N. D., Duc N. D. New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT. *Composite Structures*. 2018. Vol. 185. P. 455–465. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.047.
4. Yadav A., Amabili M., Panda S. K., Dey T., Kumar R. Forced nonlinear vibrations of circular cylindrical sandwich shells with cellular core using higher-order shear and thickness deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2021. Vol. 510. Article 116283. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116283.
5. Van Quyen N., Van Thanh N., Quan T. Q., Duc N. D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 162. Article 107571. https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107571.
6. Zhang Y., Li Y. Nonlinear dynamic analysis of a double curvature honeycomb sandwich shell with simply supported boundaries by the homotopy analysis method. *Composite Structures*. 2019. Vol. 221. Article 110884. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.056.
7. Neigapula V. S. N., Sinha P. K. Nonlinear free vibration analysis of laminated composite shells in hygrothermal environments. *Composite Structures*. 2007. Vol. 77. P. 475–483. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.08.002.
8. Li C., Shen H.-S., Wang H., Yu Z. Large amplitude vibration of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. Vol. 174. Article 105472. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105472.
9. Li Y., Li F., He Y. Geometrically nonlinear forced vibrations of the symmetric rectangular honeycomb sandwich panels with completed clamped supported boundaries. *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. Iss. 2. P. 360–368. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.09.006.
10. Reinaldo Goncalves B., Jelovica J., Romanoff J. A homogenization method for geometric nonlinear analysis of sandwich structures with initial imperfections. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 87. P. 194–205. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.02.009.
11. Catapano A., Montemurro M. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. Part I: Homogenisation of core properties. *Composite Structures*. 2014. Vol. 118. P. 664–676. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.057.
12. Amabili M. Nonlinear mechanics of shells and plates in composite, soft and biological materials. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. https://doi.org/10.1017/9781316422892.

Надійшла до редакції 11.12.2024