УДК 539.3

ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ДВОМА ТОВСТОСТІННИМИ ТРУБАМИ Й ОДНІЄЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

О. Ю. Деньщиков,
канд. техн. наук
Alex_day@ukr.net
ORCID: 0009-0008-2385-5841

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»,
61070, Україна, м. Харків,
вул. Вадима Манька, 17

Конструкції, закріплені на циліндричних включеннях, є серед найпоширеніших у машино- й авіабудуванні. Певна кількість таких включень може бути промодельована в розрахункових моделях як товстостінні труби для яких задано значення напружень на внутрішній поверхні. Однак у літературі не наведено точних методів розрахунку вищезгаданих конструкцій, що свідчить про актуальність постановки і вирішення таких завдань. У поданій роботі розглянуто метод розв'язання для моделі конструкції, яка представлена у вигляді пружного однорідного шару, розташованого на двох врізаних у нього трубах, і має поздовжню циліндричну порожнину, паралельну його межам. На плоских поверхнях шару поверхні порожнини, на внутрішніх поверхнях труб напруження вважаються відомими. При розв'язанні задачі застосовано системи координат двох типів: декартова для шару й циліндричні – для труб і порожнини. Базові розв'язки в різних системах координат представлені у вигляді рівнянь Ламе і поєднані за допомогою функцій переходу узагальненого методу Фур'є. Нескінчена система інтегро-алебраїчних рівнянь сформована, спираючись на граничні умови на верхній та нижній поверхнях шару, поверхні порожнини й умови спряження між шаром і трубами. Після цього система рівнянь була зведена до лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, до яких застосовано метод редукції. Задача розв'язана чисельно із наперед заданою точністю, що дозволило отримати характеристики напруженого стану у будь-якій точці пружного тіла. Проведено аналіз напруженого стану з різними значеннями відстані між товстостінними трубами. На верхній та нижній межах шару, на поверхні циліндричної порожнини напруження вважаються відомими. Отримано результати, які не показали суттєвого впливу відстані між товстостінними трубами на напруження уздовж нижньої та верхньої поверхонь шару. При цьому напруження в шарі вздовж поверхні спряження труби й шару при збільшенні відстані між трубами зменшуються. Отримано числові результати, що можуть бути застосовані при прогнозуванні геометричних параметрів під час проєктування конструкції, які закріплені за допомогою циліндричних включень.

Ключові слова: *шар з циліндричними включеннями, товстостінні труби, узагальнений метод Фур'є.*

Вступ

На етапі проєктування авіа- й машинобудівних конструкцій важливою є задача вибору розрахункової схеми. При цьому зони з'єднань тіл залежно від взаємних співвідношень розмірів, механічних характеристик можуть бути промодельовані в розрахункових моделях у вигляді порожнин або різного роду включень. Одним із варіантів спрощення розрахункової схеми є моделювання меншого з тіл – товстостінної труби з іншими ніж у основного тіла механічними властивостями.

Вибір методу розрахунку, за допомогою якого буде визначено напружений стан у тілі, є не менш важливою задачею у зв'язку з тим, що коректність даного вибору безпосередньо впливає на точність отриманих результатів розрахунку.

Найбільш поширеною практикою на цей час вважається використання для розв'язання подібних задач методів будівельної механіки або різного роду чисельних методів [1, 2]. Прикладом такого роду досліджень виступає робота [3], в якій для аналізу напруженого стану застосовується метод скінчених елементів. У даній роботі представлений розв'язок для півпростору, підкріпленого плитою, із вертикальною циліндричною порожниною, армованою оболонкою. Недоліком методів будівельної механіки є суттєве спрощення моделі під час розрахунку, у той саме час чисельні методи наближені і не враховують нескінчені границі тіла. Вищезгадані недоліки призводять до того, що використання методів будівельної механіки або чисельних методів не може гарантувати високу точність кінцевого результату [4].

Для отримання точних результатів потрібно застосовувати аналітичні методи [5, 6], але, на жаль, вони не можуть враховувати більше трьох просторових граничних поверхонь.

Крім того, існує велика кількість робіт, в яких циліндрична порожнина або включення перпендикулярні до поверхонь шару [7–11]. Розв'язок для хвильового поля нескінченного пружного шару, який ослаблено циліндричною порожниною, знайдено у роботі [7]. Умови закріплення представлено у вигляді ідеального контакту уздовж верхньої та нижньої поверхонь шару. Навантаження, прикладені до шару, представлені у вигляді розтягувального навантаження, що діє уздовж циліндричної порожнини. Постановка задачі у роботі [8] аналогічна, ураховуючи те, що нижня поверхня шару має жорстке закріплення. Для отримання результатів у роботах [7, 8] стали в нагоді інтегральні перетворення Лапласа й інтегральний метод Фур'є. Ці методи застосовано до граничних умов і осесиметричних рівнянь руху, які створюють одновимірну векторну неоднорідну крайову задачу. Основний недолік вищезгаданого підходу полягає в тому, що він не дає можливості отримати розв'язок задачі з декількома граничними поверхнями.

У роботі [9] віднайдено аналітичний розв'язок для функціонально градуйованих (FG) композитних ламінованих пластин із круглими вирізами за різних умов навантаження, а також порівняно аналітично отримані результати і результати, здобуті за допомогою методу комплексної змінної та методу скінчених елементів.

Задача знаходження розподілу термічних напружень у симетричних композитних пластинах із некруглими отворами під дією рівномірного теплового потоку розв'язана в роботі [10]. При цьому спочатку розв'язана задача для ламінованих пластин із композиту з круглими отворами, а після цього за допомогою функції відображення було отримано результати для пластини з некруглими отворами. Такий підхід не гарантує точності кінцевих результатів у зв'язку з тим, що використані методи є наближеними.

Робота [11] присвячена отриманню розподілу напружень у пружному півпросторі з вертикальною циліндричною порожниною при навантаженні його за допомогою коаксіального штампу, що обертається під дією крутного моменту навколо власної осі. Розв'язок отримано за допомогою інтегральних перетворень Вебера-Орра.

На жаль, роботи [7–11] орієнтовані на розв'язок задач із розташуванням порожнини або включення перпендикулярно поверхням шару, тому отримані в них результати не можна використати для знаходження розв'язку задачі для шару, який містить включення, розташовані паралельно його поверхням, суттєво не доопрацювавши.

Неоднорідність моделі шару, із включеннями у вигляді труб і порожнин, може бути врахована за допомогою методів, що використовуються для розрахунку композиційних матеріалів [12–15].

Робота [12] присвячена визначенню динамічного напруженого стану для двох стрижнів різної довжини, що з'єднані внахлест, під дією повздовжньої сили, яка прикладена до одного зі стрижнів.

Поведінка багатошарових конструкцій під дією динамічного навантаження, що виникло при поперечному ударі, вивчалося в роботі [13]. Розв'язок отримано за допомогою теорії двовимірної дискретної структури. У процесі рішення функція переміщень для кожного з шарів була представлена у вигляді степеневого ряду. Отримані теоретично результати перевірені за допомогою експериментальних досліджень.

Вивченню напруженого стану в авіаційних багатошарових склопакетах присвячені роботи [14] і [15]. Так, у роботі [14] досліджено термонапружений стан у багатошаровому склопакеті, який розглядається як незамкнена циліндрична багатошарова оболонка постійної товщини. Вважається, що термічні навантаження виникли під дією міжшарових плівкових джерел тепла. У роботі надано аналітичний розв'язок. Метод оцінки міцності багатошарового склопакета при зіткненні з птахом було запропоновано в роботі [15]. Під час розв'язання задачі враховано зменшення товщини й інерції обертання елементу кожного шару. Результати робіт [12–15] також не можна використати для розв'язку поставленої в даній роботі задачі без дуже суттєвого доопрацювання.

Таким чином, для отримання розв'язку поставленої задачі з наперед заданою точністю найбільш перспективним є аналітико-числовий узагальнений метод Фур'є [16]. Він дозволяє отримувати розв'язок для моделей, що складаються з групи тіл, кожне з яких має свою систему координат, причому одночасно можливе використання декількох типів систем координат.

Застосовуючи узагальнений метод Фур'є, розв'язки для пружного циліндра з циліндричними порожнинами отримано в роботах [17, 18], з циліндричними включеннями – у роботі [19], а також для півпростору зі сфероїдальною порожниною – у роботі [20]. При цьому використовувалися локальні циліндричні системи координат і формули переходу базисних розв'язків між ними, а для шару зі сфероїдальною порожниною – декартова і сферична системи координат.

У роботах [21–23] для переходу базисних розв'язків між циліндричною й декартовою системами координат запропоновані формули різного виду: у роботі [21] – для півпростору з циліндричною порожниною; [22] – для шару з порожниною на поверхні якої задані напруження; у [23] презентовано розв'язок для шару з циліндричним включенням, для якого переміщення вважаються відомими. Проте в даних роботах не застосовуються формули переходу між локальними системами координат, необхідні для отримання результатів для шару з декількома неоднорідностями.

Збільшенню кількості тіл, що враховуються в розрахунковій моделі, присвячені роботи [24–26]. Так, у роботі [24] розглядається ситуація, коли для двох із тіл (шар і півпростір) використовуються декартові системи координат, а початок третьої – циліндричної системи координат співпадає з початком координат півпростору. У роботі [25] вивчено шар, закріплений на двох циліндричних опорах, а робота [26] присвячена дослідженню напруженого стану в шарі з двома суцільними циліндричними включеннями і змішаними граничними умовами.

Знаходженню напруженого стану в моделях, де неоднорідність представлена у вигляді труб, присвячені роботи [27, 28]. Однак у них ураховано тільки одну неоднорідність, натомість відсутні формули переходу між зсунутими циліндричними системами координат.

Вищезгадані формули переходу наведені в роботі [29], присвяченій аналізу напруженого стану шару з двома циліндричними шарнірами й циліндричною порожниною. Представлена робота є продовженням досліджень, розпочатих у роботі [29], при цьому циліндричні шарніри замінено на товстостінні труби, що потребує введення додаткових умов спряження.

Постановка задачі

Пружний однорідний шар розташований на двох врізаних в нього трубах і має поздовжню циліндричну порожнину, паралельну його межам (рис. 1).

Труби розглядаються в циліндричній системі координат, а їх геометричні розміри задані зовнішнім радіусом R_p, і внутрішнім r_p, де p – номер циліндричної неоднорідності. Шар представлений у декартовій системі координат (x, y, z), порожнини – в локальних циліндричних системах координат (ρ_p, φ_p, z). Верхня межа шару являє собою площину з постійною координатою $y=h$, нижня – так само з $y=-\tilde{h}$.

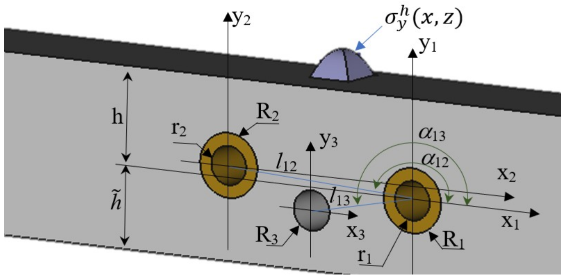

Рис. 1. Шар із двома врізаними товстостінними трубами й циліндричною порожниною

Необхідно знайти розв'язок рівняння Ламе $\Delta\vec{u} + (1-2\sigma)^{-1}\nabla div\vec{u} = 0$.

На верхній та нижній межах шару й на поверхні циліндричної порожнини (p=3) задані напруження, відповідно

$$F\vec{U}(x,z)_{|y=h} = \vec{F}_h^0(x,z); \quad F\vec{U}(x,z)_{|y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z); \quad F\vec{U}(\varphi_3,z)_{|\rho_3=R_3} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(\varphi_3,z). \tag{1}$$

де $\vec{U}$ – переміщення в шарі; $F\vec{U} = 2\cdot G\cdot\left[\frac{\sigma}{1-2\cdot\sigma}\vec{n}\cdot \mathrm{div}\vec{U} + \frac{\partial}{\partial n}\vec{U} + \frac{1}{2}\left(\vec{n}\times \mathrm{rot}\vec{U}\right)\right]$ – оператор напруження.

Функції розподілу напружень

$$\vec{F}_h^0(x,z) = \tau_{yx}^{(h)}(x,z)\cdot\vec{e}_x + \sigma_y^{(h)}(x,z)\cdot\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)}(x,z)\cdot\vec{e}_z,$$

$$\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}(x,z)\cdot\vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})}(x,z)\cdot\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})}(x,z)\cdot\vec{e}_z,$$

$$\vec{F}_R^0(\varphi_3,z) = \sigma_\rho^{(3)}(x,z)\cdot\vec{e}_\rho + \tau_{\rho\varphi}^{(3)}(x,z)\cdot\vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z}^{(3)}(x,z)\cdot\vec{e}_z$$

вважаються відомими.

На внутрішніх поверхнях труб p=1, p=2 також задані нормальні й дотичні напруження

$$F\vec{U}(\varphi_1,z)_{|\rho_1=r_1} = \vec{F}_1^0(\varphi_1,z), \; F\vec{U}(\varphi_2,z)_{|\rho_2=r_2} = \vec{F}_2^0(\varphi,z). \tag{2}$$

Умови спряження – рівність переміщень і напружень уздовж контактуючих поверхонь кожної з труб і шару

$$\vec{U}_0(\varphi,z)\big|_{\rho=R_1}=\vec{U}_p(\varphi,z)\big|_{\rho=R_1}\,;\quad \vec{U}_0(\varphi,z)\big|_{\rho=R_2}=\vec{U}_p(\varphi,z)\big|_{\rho=R_2}\,; \tag{3}$$

$$F\vec{U}_0(\varphi,z)\big|_{\rho=R_1}=F\vec{U}_p(\varphi,z)\big|_{\rho=R_1}\,;\quad F\vec{U}_0(\varphi,z)\big|_{\rho=R_2}=F\vec{U}_p(\varphi,z)\big|_{\rho=R_2}\,. \tag{4}$$

Вважатимемо, що при збільшенні відстані від початку координат уздовж осі z й осі x всі задані функції асимптотично наближуються до нуля.

Розв'язання задачі

Для розв'язання задачі переміщення в шарі представлено у вигляді [17]

$$\vec{U}_0=\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)+\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right)d\mu\cdot d\lambda+$$

$$+\sum_{p=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_{k,m}^{(p)}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)d\lambda\,. \tag{5}$$

Переміщення в трубах у вигляді [20]

$$\vec{U}_1=\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_{k,m}^{(1)}(\lambda)\cdot\vec{R}_{k,m}(\rho_1,\varphi_1,z;\lambda)+\widetilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho_1,\varphi_1,z;\lambda)d\lambda,$$

$$\vec{U}_2=\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_{k,m}^{(2)}(\lambda)\cdot\vec{R}_{k,m}(\rho_2,\varphi_2,z;\lambda)+\widetilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho_2,\varphi_2,z;\lambda)d\lambda,$$

де $H_k(\lambda,\mu)$, $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\widetilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $\widetilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ – невідомі функції, які знайдено з крайових умов (1), (2) й умов спряження (3), (4).

Базисні розв'язки рівняння Ламе $\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$, $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ представлено у вигляді [27]

$$\vec{u}_k^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu)=N_k^{(d)}e^{i(\lambda z+\mu x)\pm\gamma y};$$
$$\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)=N_k^{(p)}I_m(\lambda\rho)e^{i(\lambda z+m\varphi)};$$
$$\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)=N_k^{(p)}\left[(\operatorname{sign}\lambda)^m K_m(|\lambda|\rho)\cdot e^{i(\lambda z+m\varphi)}\right];\quad k=1,2,3;$$

$$N_1^{(d)}=\frac{1}{\lambda}\nabla\,;\quad N_2^{(d)}=\frac{4}{\lambda}(\nu-1)\,\vec{e}_2^{(1)}+\frac{1}{\lambda}\nabla(y\,\cdot);\quad N_3^{(d)}=\frac{i}{\lambda}\operatorname{rot}\left(\vec{e}_3^{(1)}\cdot\right);$$

$$N_1^{(p)}=\frac{1}{\lambda}\nabla\,;\quad N_2^{(p)}=\frac{1}{\lambda}\left[\nabla\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+4(\nu-1)\left(\nabla-\vec{e}_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right];$$

$$N_3^{(p)}=\frac{i}{\lambda}\operatorname{rot}\left(\vec{e}_3^{(2)}\right);\quad \gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,;\quad -\infty<\lambda,\mu<\infty\,,$$

де σ – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Нескінчена система інтегро-алгебраїчних рівнянь має 9 невідомих і складається з п'яти рівнянь, що задовольняють граничним умовам (1) і (2) і чотирьом умовам спряження (3) і (4). У зв'язку з тим, що складові рівнянь (5) записані в різній системі координат, було використано формули переходу між базисними розв'язками [26]:

– для переходу від базисних розв'язків $\vec{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв'язків шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при y>0) і $\vec{u}_k^{(+)}$ (при y<0)

$$\vec{S}_{k,m}\left(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda\right)=\frac{(-i)^m}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_{\mp}^m\cdot e^{-i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\vec{u}_k^{(\mp)}\cdot\frac{d\mu}{\gamma},\ k=1,\ 3;$$

$$\vec{S}_{2,m}\left(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda\right)=\frac{(-i)^m}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_{\mp}^m\cdot\left(\left(\pm m\cdot\mu-\frac{\lambda^2}{\gamma}\pm\lambda^2\bar{y}_p\right)\vec{u}_1^{(\mp)}\mp\lambda^2\vec{u}_2^{(\mp)}\pm 4\mu(1-\sigma)\vec{u}_3^{(\mp)}\right)\cdot\frac{e^{-i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}d\mu}{\gamma^2}, \qquad (6)$$

де $\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$; $\omega_{\mp}(\lambda,\mu)=\dfrac{\mu\mp\gamma}{\lambda}$; $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$;

– для переходу від базисних розв'язків $\vec{u}_k^{(+)}$ і $\vec{u}_k^{(-)}$ шару до розв'язків $\vec{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\vec{u}_k^{(\pm)}(x,y,z)=e^{i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(i\cdot\omega_{\mp}\right)^m\vec{R}_{k,m},\ \left(k=1,\ 3\right);$$

$$\vec{u}_2^{(\pm)}(x,y,z)=e^{i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\left(i\cdot\omega_{\mp}\right)^m\cdot\lambda^{-2}\left(\left(m\cdot\mu+\bar{y}_p\cdot\lambda^2\right)\cdot\vec{R}_{1,m}\pm\gamma\cdot\vec{R}_{2,m}+4\mu(1-\sigma)\vec{R}_{3,m}\right)\right], \qquad (7)$$

де $\vec{R}_{k,m}=\vec{\tilde{b}}_{k,m}\left(\rho_p,\lambda\right)\cdot e^{i\left(m\varphi_p+\lambda z\right)}$;

$$\vec{\tilde{b}}_{1,n}(\rho,\lambda)=\vec{e}_\rho\cdot I_n'(\lambda\rho)+i\cdot I_n(\lambda\rho)\cdot\left(\vec{e}_\varphi\frac{n}{\lambda\rho}+\vec{e}_z\right);$$

$$\vec{\tilde{b}}_{2,n}(\rho,\lambda)=\vec{e}_\rho\cdot\left[(4\sigma-3)\cdot I_n'(\lambda\rho)+\lambda\rho I_n''(\lambda\rho)\right]+\vec{e}_\varphi i\cdot m\left(I_n'(\lambda\rho)+\frac{4(\sigma-1)}{\lambda\rho}I_n(\lambda\rho)\right)+\vec{e}_z i\lambda\rho I_n'(\lambda\rho);$$

$$\vec{\tilde{b}}_{3,n}(\rho,\lambda)=-\left[\vec{e}_\rho\cdot I_n(\lambda\rho)\frac{n}{\lambda\rho}+\vec{e}_\varphi\cdot i\cdot I_n'(\lambda\rho)\right];$$

$\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

– для переходу від базисних розв'язків циліндру з номером p до розв'язків циліндру з номером q

$$\vec{S}_{k,m}\left(\rho_p,\varphi_p,z;\lambda\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec{b}_{k,pq}^{mn}\left(\rho_q\right)\cdot e^{i\left(n\varphi_q+\lambda z\right)},k=1,\ 2,\ 3;$$

$$\vec{b}_{1,pq}^{mn}\left(\rho_q\right)=(-1)^n\tilde{K}_{m-n}\left(\lambda\ell_{pq}\right)\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}\cdot\vec{\tilde{b}}_{1,n}\left(\rho_q,\lambda\right);$$

$$\vec{b}_{2,pq}^{mn}\left(\rho_q\right)=(-1)^n\left\{\tilde{K}_{m-n}\left(\lambda\ell_{pq}\right)\cdot\vec{\tilde{b}}_{2,n}\left(\rho_q,\lambda\right)-\frac{\lambda}{2}\ell_{pq}\cdot\left[\tilde{K}_{m-n+1}\left(\lambda\ell_{pq}\right)+\tilde{K}_{m-n-1}\left(\lambda\ell_{pq}\right)\right]\cdot\vec{\tilde{b}}_{1,n}\left(\rho_q,\lambda\right)\right\}\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

$$\vec{b}_{3,pq}^{mn}\left(\rho_q\right)=(-1)^n\tilde{K}_{m-n}\left(\lambda\ell_{pq}\right)\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}\cdot\vec{\tilde{b}}_{3,n}\left(\rho_q,\lambda\right), \qquad (8)$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{qp}, $\tilde{K}_m(x)=\left(sign(x)\right)^m\cdot K_m\left(|x|\right)$.

Після використання формул переходу базисних розв'язків між системами координат (6)–(8) система рівнянь була представлена в одній системі координат. Таким чином, нескінчену інтегро-алгебраїчну система рівнянь зведено до нескінченої лінійної системи рівнянь, до якої було застосовано метод редукції [22]. Порядок системи рівнянь m є параметром точності результатів розрахунку.

Чисельні дослідження напруженого стану

Крізь пружний ізотропний шар (рис. 1) проходять дві однорідні товстостінні труби. Крім того, шар має в собі одну циліндричну порожнину. Коефіцієнт Пуассона шару (Сплав Д16Т) σ=0,3; модуль пружності E=71000 Н/мм^2. Коефіцієнт Пуассона труб (Сталь ШХ15) σ=0,28, модуль пружності E=216000 Н/мм^2.

Геометричні параметри моделі: зовнішній радіус труб $R_1=R_2$=16 мм, внутрішній $r_1=r_2$=11 мм, радіус порожнини R_2=16 мм, відстань до верхньої та нижньої меж шару h=32 мм, $\tilde{h}$ =22 мм. Труби й порожнина розташовані паралельно між собою, при цьому їх центральні осі лежать на горизонтальній площині, паралельній верхній та нижній межі шару, таким чином, $\alpha_{12}=0$, $\alpha_{13}=\pi$. Розрахунок виконано з різною відстанню між трубами L_{12}=80 мм та L_{12}=100 мм.

На верхній межі шару задано нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі $\sigma_y^{(h)}(x,z) = -10^8 \cdot \left(z^2+10^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2+10^2\right)^{-2}$ й нульові дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$; на нижній межі – нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі й нульові дотичні напруження таким чином, щоб шар знаходився в рівновазі. Дотичні напруження на нижній межі шару дорівнюють нулю. Нормальні напруження на внутрішніх поверхнях труб і порожнини також дорівнюють нулю.

Нескінчена система була зрізана по параметру m=4 (кількість членів ряду Фур’є і порядок системи рівнянь).

Обчислення інтегралів виконано квадратурними формулами Філона. Точність виконання граничних умов при зазначених m і заданих геометричних параметрах не менше ніж 10^{-5} при значеннях від 0 до 1. Отримано результати наведені на рис. 2–5.

На рис. 2 надано графіки заданих напружень σ_y і відповідних їм напружень σ_x на верхній поверхні шару при z=0. Показано результати розрахунків із різною відстанню між трубами: L_{12}=80 мм та L_{12}=100 мм. На нижній поверхні шару характер епюри й значення напружень такі самі.

Як показують графіки на рис. 2, зміна відстані між трубами суттєво не впливає на розподіл напружень на поверхні шару. Причому розподіл напружень σ_x дуже подібний до розподілу заданих напружень σ_y, за винятком того, що графік напружень σ_x демонструє наявність у шарі як стиснутих, так і розтягнутих зон. При збільшенні відстані від розташування екстремума на епюрі заданих напружень σ_y величини напружень зменшуються, а їх графік асимптотично наближується до нуля.

На рис. 3 зображено напруження σ_ρ в шарі вздовж поверхні спряження правої труби й шару (p=1) при z=0.

Максимальні напруження σ_ρ виникають уздовж зовнішньої бічної сторони труби і мають від’ємний знак (рис. 3). Уздовж внутрішньої бічної поверхні труби напруження додатні і значно менші за величиною. Крім того, слід відмітити, що максимальні величини напружень σ_ρ обернено пропорційні відстані між трубами.

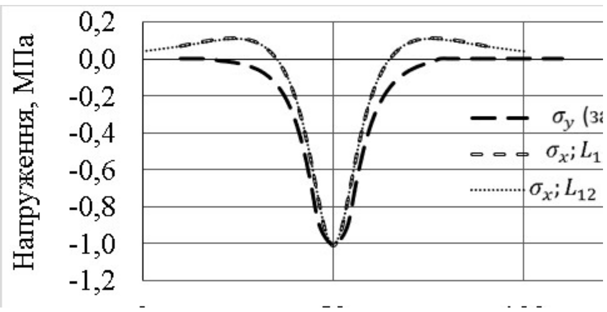

Рис. 2. Напруження на верхній поверхні шару

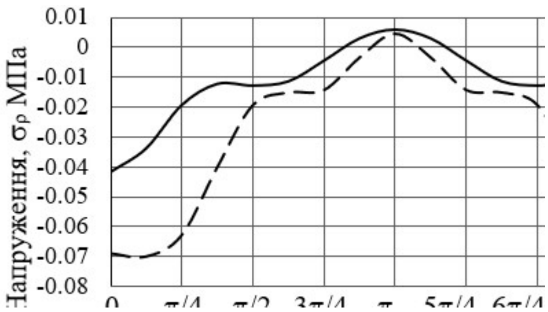

Рис. 3. Напруження σ_ρ уздовж поверхні спряження труби й шару p=1

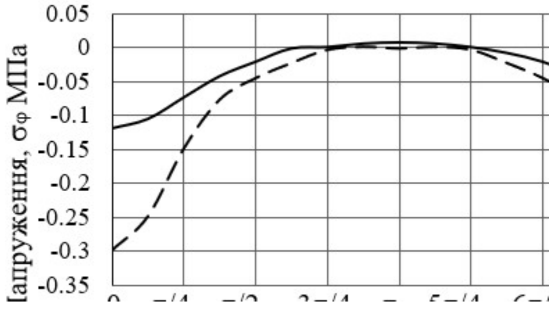

Рис. 4. Напруження σ_φ уздовж поверхні спряження труби й шару p=1

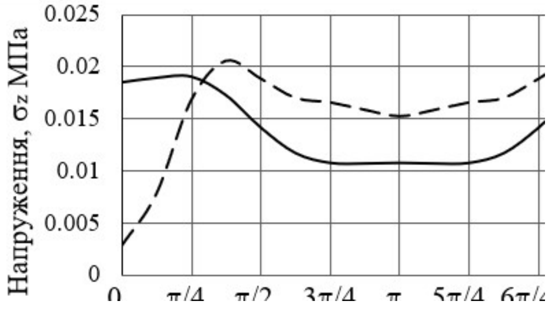

Рис. 5. Напруження σ_z уздовж поверхні спряження труби й шару p=1

На рис. 4. наведено графік напружень σ_φ вздовж поверхні спряження правої труби й шару (p=1) при z=0.

Дані графіки також показують обернену пропорційність для значення напружень і відстані між трубами.

Найбільш цікаві результати представлені на рис. 5, на якому зображено графік напружень σ_z в шарі вздовж поверхні спряження при z=0.

Як показано на даному графіку (рис. 5), при збільшенні відстані між трубами значення на епюрі σ_z стають більш рівномірними і наближеними до середнього значення.

Висновки

Розв’язана нова задача для шару, що має поздовжню циліндричну порожнину (паралельну його межам) і розташований на двох врізаних у нього товстостінних трубах.

Труби представлені у вигляді тіл, для яких задано умови спряження уздовж поверхні, де вони контактують із шаром. Це дозволило звести задачу до класичної моделі просторової теорії пружності. Її розв’язання виконано за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур’є, що дало змогу отримати розв’язок із заданою точністю. Проведений аналіз напруженого стану показав розподіл внутрішніх напружень в шарі та трубах.

Отримано результати, які свідчать, що зі збільшенням відстані між трубами значення внутрішніх напружень у шарі уздовж поверхні спряження шару й труб зменшуються.

Метод розв’язання, запропонований в роботі, може бути застосований для більшої кількості труб і порожнин.

Подальший розвиток даної роботи можливий у напрямі ускладнення математичної моделі за рахунок збільшення кількості тіл із різних матеріалів і побудови моделей з декількох труб, вкладених одна в одну.

Література

1. Tekkaya A. E., Soyarslan C. Finite element method. In: Laperrière L., Reinhart G. (eds) CIRP Encyclopedia of Production Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699.
2. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2018. 391 с.
3. Засовенко А. В., Фасоляк А. В. Математичне моделювання динаміки пружного півпростору з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою, при осесиметричних навантаженнях. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2023. № 2. С. 67–73. https://doi.org/10.15588/1607-6885-2023-2-10.
4. Азаров А. Д., Журавлев Г. А., Пискунов А. С. Сравнительный анализ аналитического и численного методов решения плоской задачи о контакте упругих цилиндров. *Инновационная наука*. 2015. № 1–2. С. 5–13.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
7. Fesenko A., Vaysfel’d N. The wave field of a layer with a cylindrical cavity. In: Gdoutos, E. (eds) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2*019. *Structural Integrity*. Cham: Springer, 2019. Vol. 8. P. 277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.
8. Fesenko A., Vaysfel’d N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity.* 2021. Vol. 33. P. 509–527. https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058.
9. Khechai A., Belarbi M.-O., Bouaziz A., Rekbi F. M. L. A general analytical solution of stresses around circular holes in functionally graded plates under various in-plane loading conditions. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234. P. 671–691. https://doi.org/10.1007/s00707-022-03413-1.
10. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2022. Vol. 304. Part 2. Article 116403. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403.
11. Malits P. Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021. Vol. 89. Article 104308. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308.
12. Smetankina N., Kurennov S., Barakhov K. Dynamic stresses in the adhesive joint. The Goland-Reissner model. In: Cioboată D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2023. ICoRSE 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2023. Vol. 762. P. 456–468. https://doi.org/10.1007/978-3-031-40628-7_38.

13. Ugrimov S., Smetankina N., Kravchenko O., Yareshchenko V., Kruszka L. A study of the dynamic response of materials and multilayer structures to shock loads. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021*. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 304–313. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_31.
14. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Misura S., Misiura Ie. Modelling thermal stresses in laminated aircraft elements of a complex form with account of heat sources. In: Cioboată D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2022. ICoRSE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham: Springer, 2023. Vol. 534. P. 233–246. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22.
15. Smetankina N., Kravchenko I., Merculov V., Ivchenko D., Malykhina A. Modelling of bird strike on an aircraft glazing. In book: Nechyporuk M., Pavlikov V., Kritskiy D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer, 2020. Vol. 1113. P. 289–297. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_25.
16. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
17. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P. 148–158. https://doi.org/10.1134/S1995423915020068.
18. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. P. 1141–1149. https://doi.org/10.1134/S0021894416060237.
19. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. P. 177–188. https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6.
20. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2012. Вып. 20. С. 253–259.
21. Ukrayinets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 2. No. 7 (110). P. 48–57. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428.
22. Мірошніков В. Ю., Денисова Т. В., Проценко В. С. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 103. С. 208–218. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218.
23. Miroshnikov V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413–420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413.
24. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress state of a composite in the form of a layer and a half space with a longitudinal cylindrical cavity at stresses given on boundary surfaces. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 4. P. 24–31. https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.024.
25. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Demenko V. F. Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. No. 1. P. 15–22. https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015.
26. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Pohrebniak O. A. Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical elastic inclusions and mixed boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2022. Vol. 25. No. 2. P. 22–29. https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022.
27. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress strain state of the layer with a longitudinal cylindrical thick-walled tube and the displacements given at the boundaries of the layer. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 2. P. 44–52. https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044.
28. Miroshnikov V. Rotation of the layer with the cylindrical pipe around the rigid cylinder. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021*. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32.

Надійшла до редакції 05.02.2025