УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ СУЦІЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ ЗА РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ТОРЦЯХ

[1] **О. Я. Григоренко**,
академік НАН України
ayagrigorenko1991@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4109-2672

[2] **Л. С. Рожок**, д-р фіз.-мат. наук
teor_mex@ukr.net
ORCID: 0000-0002-7926-9074

[1] **Н. П. Борейко**, канд. фіз.-мат. наук
nataliya.petrivna@ukr.net
ORCID: 0000-0003-3697-9997

[1] **Л. В. Харитонова**, канд. фіз.-мат. наук
kharytonova-lv@ukr.net
ORCID: 0000-0002-0108-6702

[1] Інститут механіки
ім. С. П. Тимошенка НАН України,
03057, Україна, м. Київ, вул. Нестерова, 3

[2] Національний транспортний університет,
01010, Україна, м. Київ,
вул. М. Омеляновича-Павленка, 1

Розв'язання задач теорії пружності про напружений стан неперервно-неоднорідних тіл потребує удосконалення існуючих і розробки нових чисельно-аналітичних методів, що дають змогу повною мірою врахувати довільні залежності властивостей матеріалу від координат і характер прикладеного навантаження. Стаття присвячена розв'язанню вісесиметричної задачі лінійної теорії пружності про рівновагу суцільних, неоднорідних вздовж радіальної координати циліндрів, за різних способів закріплення торців. Як матеріал обрано полімерний неперервно-неоднорідний із градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга вздовж радіальної координати. Розглянуто три варіанти закону зміни модуля пружності (зростаючий, спадний та усереднений) і два способи закріплення торців (шарнірне обпирання і жорстке закріплення). Метою публікації є проведення чисельного аналізу напруженого стану циліндрів даного класу залежно від закону зміни пружних властивостей матеріалу, довжини циліндрів і способу закріплення торців. Розв'язок задачі базується на застосуванні методу сплайн-апроксимації функцій в напрямку поздовжньої координати й чисельного методу дискретної ортогоналізації за радіальною координатою. Розкрито невизначеність у геометрично особливій точці $r=0$. Проаналізовано напружений стан циліндрів, що вивчаються, залежно від закону зміни пружних характеристик матеріалу, довжини циліндрів і способу закріплення торців. Показано, що найбільший вплив закону зміни модуля Юнга на напружений стан циліндрів спостерігається для колових напружень на зовнішній поверхні в середньому перерізі довжини для обох способів закріплення торців. Крім того, вплив матеріалу має місце як для колових, так і для радіальних напружень на торцях для коротких циліндрів ($l=6l_0$) за жорсткого способу закріплення торців. Порівняно з усередненим законом, їх величина зменшується приблизно у 5 разів для спадного і збільшується приблизно у 3 рази для зростаючого закону зміни модуля пружності. За умов жорсткого закріплення торців мають місце крайові ефекти на торцях, які залежать від довжини циліндрів. Отримані в роботі результати можуть бути використані при розрахунках на міцність елементів конструкцій та деталей машин подібного типу.

***Ключові слова**: вісесиметрична задача, напружений стан, суцільні циліндри, неперервно-неоднорідні матеріали, чисельний метод.*

Вступ

Розв'язання задач теорії пружності про напружений стан неперервно-неоднорідних тіл потребує удосконалення існуючих і розробки нових ефективних методів, що дають змогу повною мірою врахувати довільні залежності властивостей матеріалу від координат і характер прикладеного навантаження [1–5]. У роботах [6–8] запропоновано підхід до розв'язання задач про напружений стан суцільних радіально неоднорідних циліндрів, що базується на методі зведення до інтегрального рівняння Вольтерра. Для визначення напружено-деформованого стану скінченного циліндра під дією зусиль стиску в роботі [9] застосовано чисельно-аналітичний метод скінченних квадратів. На основі варіаційних принципів [10] розв'язано задачі про напружений стан вісесиметричного циліндра при дії поверхневого навантаження [11] й анізотропної товстостінної композитної шаруватої оболонки під дією бічного тиску [12].

Необхідність проведення оцінок міцності, довговічності й надійності вже існуючих і новостворюваних інженерно-технічних систем стає причиною виникнення складних задач механіки деформівного твердого тіла. Їх розв'язання стало можливим завдяки розвитку чисельних методів у поєднанні з використанням комп'ютерного моделювання поставлених проблем [13–15]. Одним із найчастіше застосовуваних чисельних методів є метод скінченних елементів [16], для якого розроблені і вдосконалюються відповідні пакети прикладних програм, орієнтовані на розв'язання конкретних класів задач теорії пружності [17].

При дослідженні напруженого стану й коливань оболонок різної геометрії й структури став у нагоді метод сплайн-колокації [18, 19], який дозволяє отримувати розв'язки згаданих класів задач із достатнім ступенем точності. Так, у роботі [20] в рамках просторової теорії пружності розв'язано задачу про напружений стан неоднорідного порожнистого циліндра за жорсткого закріплення торців на основі сплайн-апроксимації, при цьому достовірність отримуваних результатів перевірена за допомогою метода скінчених елементів. На основі методу сплайн-апроксимації в роботі [21] досліджується напружений стан ізотропних суцільних циліндрів за різних способів закріплення торців під дією зовнішнього рівномірного нормального навантаження.

Дана публікація є продовженням робіт, присвячених застосуванню методу сплайн-апроксимації до розв'язання вісесиметричних задач про напружений стан суцільних циліндрів за різних способів закріплення торців. При цьому розглядаються циліндри, виконані з неперервно-неоднорідного матеріалу.

Метою статті є вивчення впливу на напружений стан суцільних циліндрів, що знаходяться під дією поверхневого нормального навантаження, зміни закону пружних властивостей матеріалу, довжини циліндрів і способу закріплення торців на основі методики, що базується на використанні аналітичних методів відокремлення змінних одночасно з сплайн-апроксимацією функцій за поздовжньою координатою і чисельним методом дискретної ортогоналізації за радіальною [21].

Постановка задачі та методика розв'язання

Розв'язується вісесиметрична задача лінійної теорії пружності. Суцільні циліндри віднесено до ортогональної циліндричної системи координат r, θ, z, де r – полярний радіус; θ – центральний кут у поперечному перерізі; z – поздовжня координата. Коефіцієнти Ламе в даній системі координат набувають вигляду

$$H_1=1; \quad H_2=r; \quad H_3=1.$$

При цьому мають місце співвідношення

$$x = r\cdot\cos\theta; \quad y = r\cdot\sin\theta; \quad z = z.$$

За вихідні приймаються рівняння лінійної теорії пружності для ізотропного вісесиметричного тіла в циліндричній системі координат [21]. Додаючи до них навантаження на бічній поверхні $r=R$ й граничні умови на торцях $z=0$; l, прийдемо до двовимірної крайової задачі.

Для розглядуваних циліндрів оберемо неперервно-неоднорідний у радіальному напрямку матеріал. Нехай циліндри знаходяться під дією зовнішнього нормального навантаження $q=q_0\cdot\sin(\pi s/l)$ ($q_0=const$). Граничні умови на бічній поверхні $r=R$ за рахунок прикладеного навантаження мають вигляд

$$\sigma_r = q_r\,; \ \tau_{rz} = 0 \ \text{при } r=R. \tag{1}$$

Розглядатимемо два види граничних умов на торцях, а саме: шарнірного обпирання та жорсткого закріплення. У випадку шарнірного обпирання торців граничні умови мають вигляд

$$\sigma_z = 0; \quad u_r = 0 \ \text{при } z=0;\ l, \tag{2}$$

а у разі жорсткого закріплення торців

$$u_r = 0; \quad u_z = 0 \ \text{при } z=0;\ l. \tag{3}$$

Задача розв'язується в інтервалі $0\le r\le R$, тому необхідно сформулювати ще й граничні умови для $r=0$. Виходячи із фізичних міркувань, за такі можна прийняти

$$\tau_{rz} = 0; \quad u_r = 0 \ \text{при } r=0. \tag{4}$$

Оберемо за розв'язувальні функції радіальне u_r й поздовжнє u_z переміщення. Після деяких перетворень із вихідних рівнянь отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами вздовж радіальної координати r

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = -\frac{a_3}{a_1}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{a_2+a_3}{a_1}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{r^2} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_1}{\partial r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial r}\frac{u_r}{r} - \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = -\frac{a_2+a_3}{a_3}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{a_2+a_3}{a_3}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{a_1}{a_3}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{a_3}\frac{\partial a_3}{\partial r}\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{a_3}\frac{\partial a_3}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial r}; \qquad (5)$$

$$a_1 = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2}; \quad a_2 = \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2}; \quad a_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}; \; (0 \le r \le R;\ 0 \le z \le L),$$

де, в загальному випадку, $E=E(r)$ – модуль Юнга; $\nu=\nu(r)$ – коефіцієнт Пуассона.

Враховуючи, що

$$\sigma_r = a_1\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_2\frac{u_r}{r} + a_2\frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \sigma_\theta = a_2\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_1\frac{u_r}{r} + a_2\frac{\partial u_z}{\partial z}; \; \tau_{rz} = a_3\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

граничні умови (1), (4) у переміщеннях матимуть вигляд

$$u_r = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r=0 \qquad (6)$$

$$a_1\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_2\frac{u_r}{r} + a_2\frac{\partial u_z}{\partial z} = q_r; \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r=R.$$

Для зниження розмірності крайової задачі для системи рівнянь у частинних похідних (5) із граничними умовами (6) подамо розв'язок цієї системи у вигляді сплайн-функцій [21]

$$u_r = \sum_{i=1}^{N} u_{1i}(r)\cdot\varphi_{1i}(z); \quad u_z = \sum_{i=1}^{N} u_{2i}(r)\cdot\varphi_{2i}(z), \qquad (7)$$

де $u_{1i}(r)$, $u_{2i}(r)$ – шукані функції, а $\varphi_{1i}(z)$, $\varphi_{2i}(z)$ – функції, побудовані за допомогою лінійних комбінацій B-сплайнів третього степеня [22], які дозволяють точно задовольнити граничні умови на торцях циліндра (2), або (3).

У випадку шарнірного закріплення торців (2), функції $\varphi_{ij}(z)$ (i=1,2; $j=\overline{0,N}$) визначаються виразами

$$\varphi_{10}(z) = -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); \quad \varphi_{11}(z) = B_3^{-1}(z) - 0.5B_3^0(z) + B_3^1(z); \quad \varphi_{1j}(z) = B_3^j(z); \quad (j=2, 3, \ldots, N-2);$$

$$\varphi_{1N-1}(z) = B_3^{N-1}(z) - 0.5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \quad \varphi_{1N}(z) = -4B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z);$$

$$\varphi_{20}(z) = B_3^0(z); \; \varphi_{21}(z) = B_3^{-1}(z) - 0.5B_3^0(z) + B_3^1(z); \quad \varphi_{2j}(z) = B_3^j(z); \quad (j=2, 3, \ldots, N-2); \qquad (8)$$

$$\varphi_{2N-1}(z) = B_3^{N-1}(z) - 0.5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \quad \varphi_{2N}(z) = -4B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z).$$

Для жорсткого закріплення торців (3), відповідно,

$$\varphi_{i0}(z) = B_3^0(z); \quad \varphi_{i1}(z) = B_3^{-1}(z) - 0.5B_3^0(z) + B_3^1(z); \quad \varphi_{ij}(z) = B_3^j(z); \quad (j=2, 3, \ldots, N-2);\ (i=1, 2) \qquad (9)$$

$$\varphi_{iN-1}(z) = B_3^{N-1}(z) - 0.5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \quad \varphi_{jN}(z) = -4B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z).$$

Після підстановки виразів (7) з урахуванням (8), (9) до системи диференціальних рівнянь (5) необхідно задовольнити їх у точках колокації $z=z_k$ ($k=\overline{0,N}$). При цьому отримуємо систему $2(N+1)$ звичайних диференціальних рівнянь. Аналогічно чинять з граничними умовами (7) на поверхнях r=0; R.

Нехай вузли колокації ξ_k(k=0, 1, ..., N) задовольняють умовам

$$\xi_{2i} \in [z_{2i}, z_{2i+1}]; \quad \xi_{2i+1} \in [z_{2i}, z_{2i+1}] \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тоді на кожному відрізку $[z_{2i}, z_{2i+1}]$ буде два вузли колокації, а на сусідніх відрізках $[z_{2i+1}, z_{2i+2}]$ їх не буде взагалі. На кожному з відрізків $[z_{2i}, z_{2i+1}]$ точки колокації оберемо наступним чином

$$\xi_{2i} = z_{2i} + t_1 h; \quad \xi_{2i+1} = z_{2i} + t_2 h \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n),$$

де h – крок рівномірної сітки на відрізку [0, l]; t_1 і t_2 – корені полінома Лежандра другого порядку на відрізку [0, 1]

$$t_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\,;\quad t_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

Такі вузли колокації називаються оптимальними і дозволяють отримати наближений розв'язок задачі (6), (7) з точністю $O\,(h^3)$.

Таким чином, розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь зі змінними вздовж координати r коефіцієнтами набуває вигляду

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{d^2u_{1i}}{dr^2}\cdot\varphi_{1i}(z_k)=-\frac{a_3}{a_1}\sum_{i=0}^{N}u_{1i}\cdot\varphi''_{1i}(z_k)-\frac{a_2+a_3}{a_1}\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{2i}}{dr}\cdot\varphi'_{2i}(z_k)-\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{1i}}{dr}\cdot\varphi_{1i}(z_k)+$$

$$+\frac{1}{r^2}\sum_{i=0}^{N}u_{1i}\cdot\varphi_{1i}(z_k)-\frac{1}{a_1}\frac{da_1}{dr}\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{1i}}{dr}\cdot\varphi_{1i}(z_k)-\frac{1}{a_1}\frac{da_2}{dr}\sum_{i=0}^{N}\frac{u_{1i}}{r}\cdot\varphi_{1i}(z_k)-\frac{1}{a_1}\frac{da_2}{dr}\sum_{i=0}^{N}u_{2i}\cdot\varphi'_{2i}(z_k)\,;\quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{d^2u_{2i}}{dr^2}\cdot\varphi_{2i}(z_k)=-\frac{a_2+a_3}{a_3}\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{1i}}{dr}\cdot\varphi'_{1i}(z_k)-\frac{a_2+a_3}{a_3}\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{N}u_{1i}\cdot\varphi'_{1i}(z_k)-\frac{a_1}{a_3}\sum_{i=0}^{N}u_{2i}\cdot\varphi''_{2i}(z_k)-$$

$$-\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{2i}}{dr}\cdot\varphi_{2i}(z_k)-\frac{1}{a_3}\frac{da_3}{dr}\sum_{i=0}^{N}u_{1i}\cdot\varphi'_{1i}(z_k)-\frac{1}{a_3}\frac{da_3}{dr}\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{2i}}{dr}\cdot\varphi_{2i}(z_k)\quad (k=2(N+1))$$

з граничними умовами

$$\sum_{i=0}^{N}u_{1i}\cdot\varphi_{1i}(z_k)=0\,;\quad \sum_{i=0}^{N}\frac{du_{2i}}{dr}\cdot\varphi_{2i}(z_k)=0\quad \text{при } r=0;$$

$$a_1\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{1i}}{dr}\cdot\varphi_{1i}(z_k)+a_2\sum_{i=0}^{N}u_{1i}\cdot\varphi_{1i}(z_k)+a_2\sum_{i=0}^{N}u_{2i}\cdot\varphi'_{2i}(z_k)=q_r\,;$$

$$\sum_{i=0}^{N}u_{1i}\cdot\varphi'_{1i}(z_k)+\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{2i}}{dr}\cdot\varphi_{2i}(z_k)=0\quad \text{при } r=R.\quad (11)$$

Отримана система звичайних диференціальних рівнянь (10) з граничними умовами (11) утворює двоточкову крайову задачу в інтервалі $0\le r\le R$. При цьому система рівнянь (10) містить деякі доданки, які при $r=0$ перетворюються на невизначеність 0/0, для розкриття якої скористаємося відповідними граничними переходами при $r\to 0$, тобто

$$\frac{u_{1i}}{r}\to\frac{du_{1i}}{dr}\ \ (i=\overline{0,N}).\quad (12)$$

Із врахуванням (12) рівняння (10) у точці $r=0$ набувають вигляду

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{d^2u_{1i}}{dr^2}\cdot\varphi_{1i}(z_k)=-\frac{2}{a_1}\frac{da_1}{dr}\sum_{i=0}^{N}\frac{du_{1i}}{dr}\cdot\varphi_{1i}(z_k)-\frac{1}{a_1}\frac{da_2}{dr}\sum_{i=0}^{N}u_{2i}\cdot\varphi'_{2i}(z_k)\,;$$

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{d^2u_{2i}}{dr^2}\cdot\varphi_{2i}(z_k)=-\frac{a_1}{2a_3}\sum_{i=0}^{N}u_{2i}\cdot\varphi''_{2i}(z_k)-\frac{a_2+a_3}{a_3}\,.\quad (13)$$

Додаючи до систем рівнянь (10), (13) граничні умови (11), приходимо до крайової задачі, яку можна розв'язати чисельно. При цьому при $r=0$ використовується система рівнянь (13), а для усіх інших значень r – система рівнянь (10).

Введемо позначення

$$y_{1i}=u_{1i}\,;\quad y_{2i}=\frac{du_{2i}}{dr}\,;\quad y_{3i}=u_{2i}\,;\quad y_{4i}=\frac{du_{1i}}{dr}\quad (i=\overline{0,N}).$$

Тоді систему диференціальних рівнянь (10), що розв'язується, можна подати у векторному вигляді

$$\frac{d\overline{Y}}{dr}=A(r)\overline{Y}+\bar{f}\,;\quad (0\le r\le R),\quad (14)$$

де $\bar{Y} = \{y_{10},..., y_{1N}, y_{20},..., y_{2N}, y_{30},..., y_{3N}, y_{40},..., y_{4N}\}^{\mathrm{T}}$; $A(r)$ – квадратна матриця порядку $4(N+1)\times4(N+1)$; $\bar{f}$ – вектор правої частини. Граничні умови можна записати аналогічно

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{b}_1; \quad B_2\bar{Y}(0) = \bar{b}_2, \tag{15}$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці порядку $2(N+1)\times4(N+1)$.

Для знаходження розв'язку крайової задачі (14), (15) використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.

Деякі оцінки точності отримуваних результатів

За умов шарнірного закріплення торців дану задачу можна розв’язати в інший спосіб. Оберемо за функції, що розв’язуються, по дві компоненти напружень і переміщень [21]. Відокремивши змінні у напрямку координати z, на підставі подання цих функцій у вигляді розвинень у ряди Фур’є і, розв’язавши одномірну крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації, отримаємо розв’язок, який можемо прийняти за точний з достатнім ступенем точності.

Для циліндрів, що розглядаються, обрано полімерний неперервно-неоднорідний матеріал із градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга вздовж координати r: $E(r)=a\cdot r^2+b\cdot r+c$ $(0\leq r\leq R)$ [23]. У зв’язку з незначними розбіжностями коефіцієнта Пуассона для полімерних неперервно-неоднорідних матеріалів, для його величини обрано $\nu=0{,}4$. Нехай маємо зростаючий закон зміни модуля пружності, тобто $E(0)=110$ МПа; $E(R/2)=150$ МПа; $E(R)=243$ МПа, тоді коефіцієнти $a=4{,}42$; $b=5{,}4$; $c=110$. Задачу розв'язано за таких геометричних параметрів циліндрів: радіус $R=5\cdot l_0$, довжина $l=6\cdot l_0$; $10\cdot l_0$; $14\cdot l_0$.

Надалі усі лінійні розміри віднесено до одиниці довжини, напруження – до одиничного навантаження.

Результати розв'язування задачі для максимальних значень напружень σ_r, σ_θ наведено в табл. 1 у середньому перерізі довжини циліндра для трьох значень координати $r=0{,}5\cdot R$; $0{,}75\cdot R$; R. Цифрою I позначені розв'язки, отримані на основі методу відокремлення змінних із застосуванням рядів Фур'є, цифрою II – на основі сплайн-апроксимації для різної кількості N_s апроксимуючих сплайн-функцій. Як видно із наведених результатів, для N_s>4 похибка не перевищує 1% для усіх значень параметра N_s. Аналогічні результати мають місце і для двох інших законів зміни модуля Юнга. При подальших розрахунках обрано N_s=12.

Таблиця 1. Збіжність розв’язку залежно від кількості сплайн-функцій

l	r	σ_r					σ_θ					Похибка, %	
		I	II				I	II					
			N_s					N_s				N_s	
			4	6	8	12		4	6	8	12	4	6–12
6	$0{,}5\cdot R$	6,61	3,22	6,60	6,59	6,61	6,92	3,36	6,91	6,90	6,92		
	$0{,}75\cdot R$	8,29	4,09	8,28	8,28	8,29	9,48	4,64	9,46	9,46	9,48		
	R	10,00	5,01	9,99	10,00	10,00	14,39	7,12	14,33	14,38	14,39		
10	$0{,}5\cdot R$	8,49	4,19	8,49	8,48	8,49	9,21	4,53	9,19	9,19	9,20		
	$0{,}75\cdot R$	9,16	4,55	9,15	9,14	9,16	10,82	5,35	10,80	10,81	10,82	>50	<1
	R	10,00	5,03	9,99	9,99	10,00	13,42	6,70	13,38	13,40	13,42		
14	$0{,}5\cdot R$	9,01	4,47	9,00	8,99	9,01	9,68	4,79	9,67	9,66	9,68		
	$0{,}75\cdot R$	9,43	4,71	9,41	9,41	9,43	10,86	5,40	10,85	10,84	10,86		
	R	10,00	5,04	9,99	9,98	10,00	12,59	6,32	12,57	12,57	12,59		

Числові результати та їх аналіз

На основі представленої методики проведено дослідження напруженого стану суцільних неоднорідних вздовж товщини циліндрів різної довжини, що знаходяться під дією зовнішнього навантаження $q=q_0\cdot\sin(\pi s/l)$ $(q_0=10)$ за умов шарнірного й жорсткого закріплення торців. Розглядаються три варіанти закону зміни модуля пружності: 1) $E(0)=110$ МПа; $E(R/2)=150$ МПа; $E(R)=243$ МПа; 2) спадний модуль Юнга $E(0)=243$ МПа; $E(R/2)=150$ МПа; $E(R)=110$ МПа; 3) усереднений по товщині модуль Юнга $E(0)=158{,}33$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu=0{,}4$.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: радіус циліндра $R=5\cdot l_0$, його довжина $l=6\cdot l_0$; $10\cdot l_0$; $14\cdot l_0$, коефіцієнти 1) a=4,42; b=5,4; c=110 – для зростаючого; 2) a=4,42; b= –47,8; c=110 – для спадного; 3) a=0; b=0; c=158,33 – для усередненого законів зміни модуля Юнга.

Результати розв'язання задачі наведено на рис. 1–5 у вигляді графіків розподілу полів колових σ_θ і радіальних σ_r напружень вздовж довжини циліндра для трьох перерізів вздовж радіуса: на зовнішній поверхні ($r=R$) – на рис. 1–2; у перерізі $r=R/2$ – на рис. 3–4 і в перерізі $r=0$ – на рис. 5, на яких наведено поля напружень σ_θ та σ_r, де вони мають однакові значення.

Криві, позначені на графіках суцільною лінією, відповідають усередненому по товщині модулю Юнга, штриховою – зростаючому закону зміни модуля пружності і штрих-пунктирною – для спадного. На рис. 1, 3 наведені графіки розподілу полів колових напружень, на рис. 2, 4 – для радіальних. На усіх рисунках графіки *а*, *в*, *д* відповідають випадку жорсткого закріплення торців, графіки *б*, *г*, *е* – шарнірного обпирання. При цьому варіанти *а*, *б* відповідають розподілу напружень для циліндрів, довжина яких l=6, варіанти *в*, *г* – для довжини циліндрів l=10, варіанти *д*, *е* – для l=14.

Графіки, наведені на рис. 1–5 ілюструють вплив довжини циліндрів, способу закріплення торців і характеристик матеріалу на напружений стан суцільних циліндрів у різних перерізах вздовж радіуса.

Із рис. 1–2 видно, що переважними в цьому перерізі є колові напруження.

Своїх максимальних амплітудних значень напруження σ_θ і σ_r набувають в середньому перерізі довжини $z=l/2$ для обох способів закріплення торців, для усіх законів зміни модуля пружності і всіх значень довжини циліндра. Як видно з графіків (рис. 1–2), вплив матеріалу на напружений стан циліндрів, що розглядаються, має місце для колових напружень (рис. 1) у середньому інтервалі довжини $l/6\leq z\leq 5l/6$ для усіх значень l для двох способів закріплення торців і для довжини l=6 на торцях циліндра.

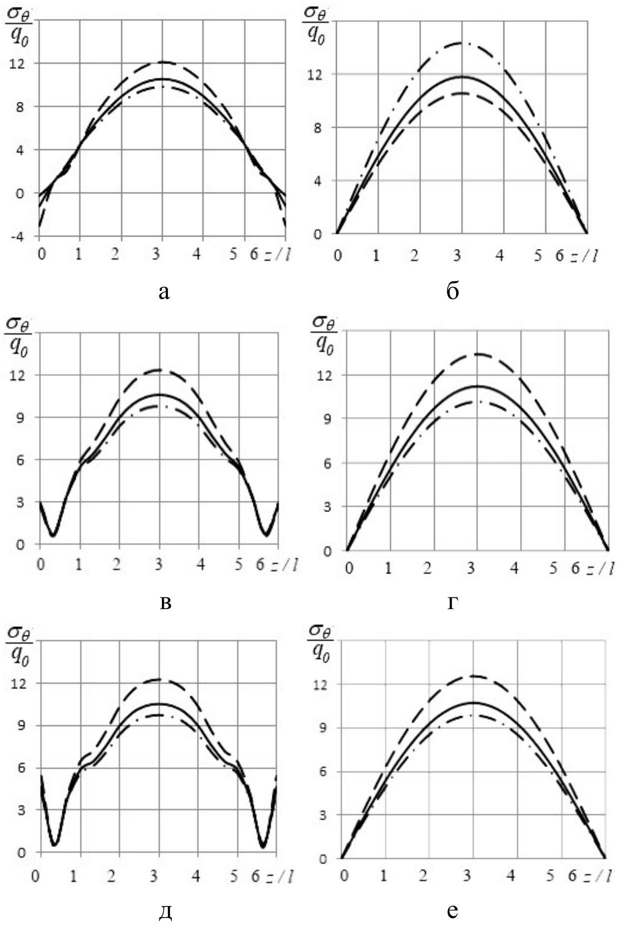

Рис. 1. Розподіл колових напружень вздовж довжини циліндрів на зовнішній поверхні циліндра r=R

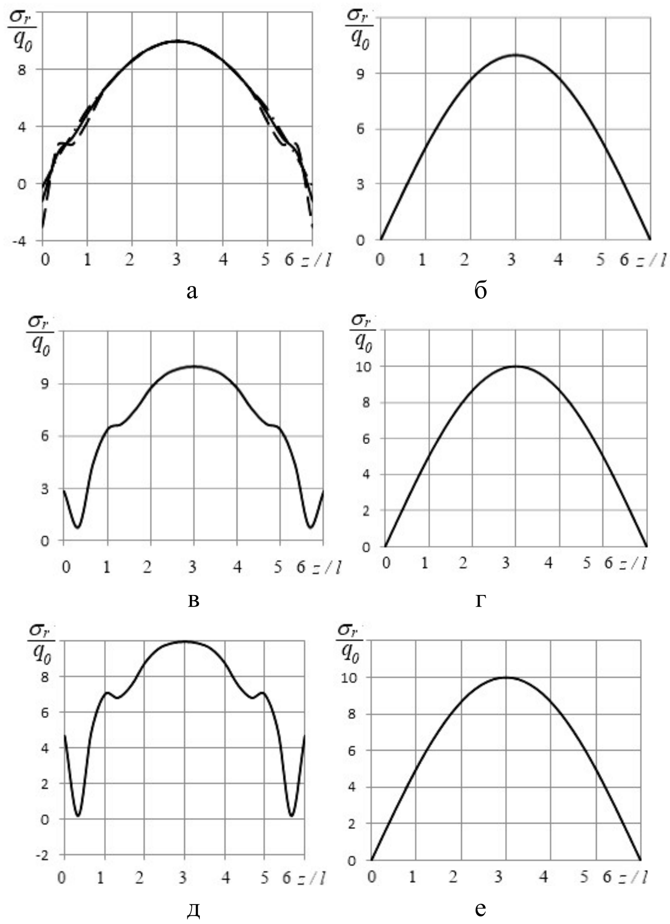

Рис. 2. Розподіл радіальних напружень вздовж довжини циліндрів на зовнішній поверхні циліндра r=R

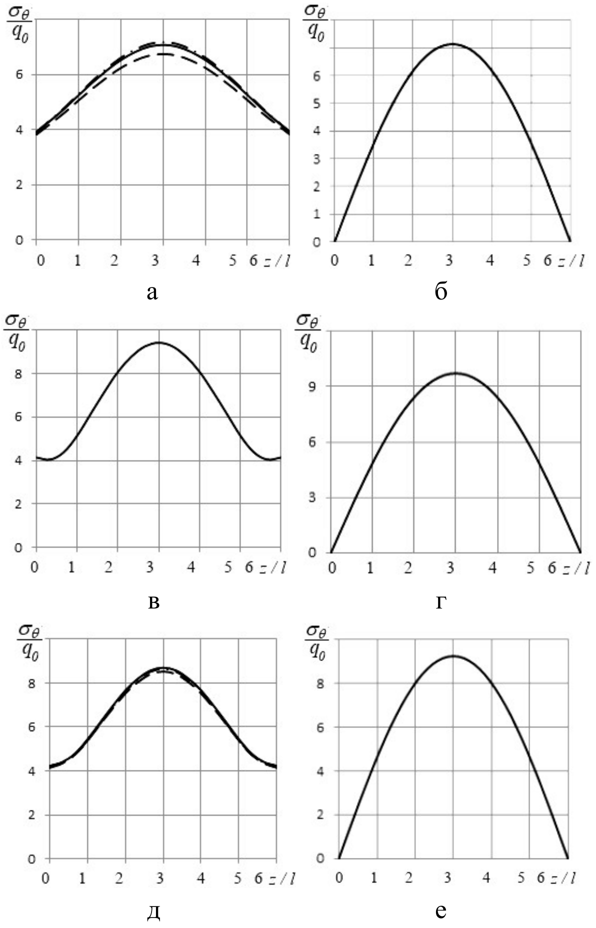

Рис. 3. Розподіл колових напружень вздовж довжини циліндрів у перерізі r=R/2

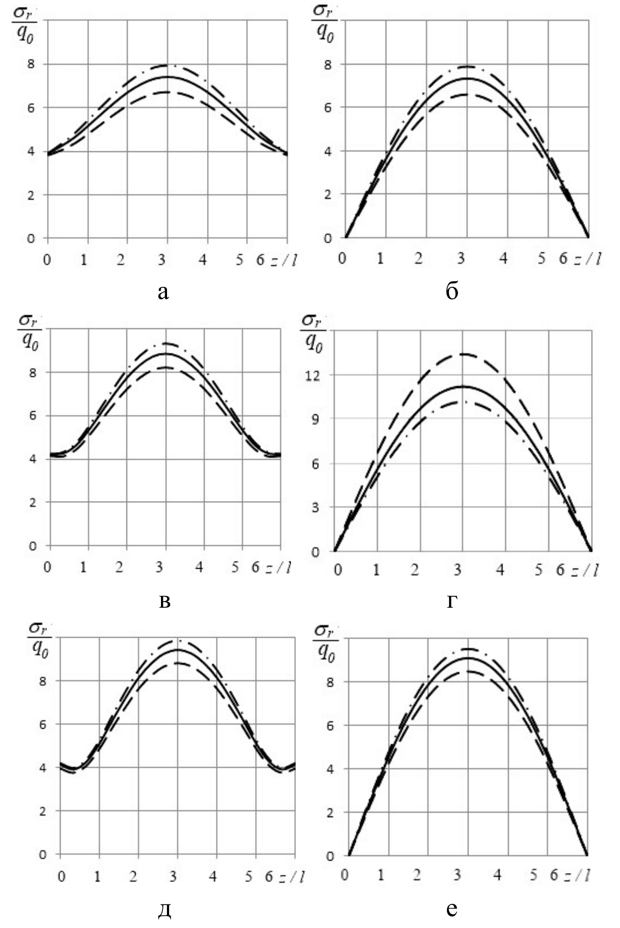

Рис. 4. Розподіл радіальних напружень вздовж довжини циліндрів у перерізі r=R/2

У середньому перерізі довжини максимальні значення колових напружень при шарнірному закріпленні торців збільшуються для зростаючого закону зміни модуля пружності в 1,2 раза порівняно із усередненим по товщині модулем Юнга і зменшується приблизно на 10% для спадного.

В усіх варіантах закону зміни модуля пружності на максимальну величину напружень відчутно впливає збільшення довжини, вона зменшується межах 7–8%.

При жорсткому закріпленні торців величина колових напружень не залежить від довжини циліндрів. При цьому максимальна величина напружень порівняно з усередненим законом зміни модуля Юнга збільшується на 14% для зростаючого закону і зменшується приблизно на 8% для спадного.

За умов шарнірного закріплення в середньому перерізі величина σ_θ збільшується приблизно на 20% порівняно із жорстким закріпленням.

На величину колових напружень суттєво впливає зміна довжини у випадку жорсткого закріплення поблизу торців циліндра. Так, якщо для коротких циліндрів l=6 величина напружень стрімко монотонно спадає, то для циліндрів довжина яких l=10; 14 їх величина, наближаючись до торців, спадає майже до нуля, а потім стрімко зростає на торцях.

Для радіальних напружень (рис. 2) вплив матеріалу має місце на торцях у випадку їх жорсткого закріплення для короткого циліндра l=6. Порівняно із усередненим законом зміни модуля Юнга їх амплітудна величина зменшується майже у 5 разів для спадного і збільшується приблизно у 3 рази для зростаючого закону зміни модуля пружності.

При шарнірному способі закріплення торців зміни довжини і закону модуля Юнга на розподіл радіальних напружень не впливають. Поблизу торців за жорсткого їх закріплення довжина аналогічно впливає на розподіл полів колових напружень.

При розподілі полів колових напружень у перерізі $r=R/2$ (рис. 3) мають місце такі особливості: для шарнірного і для жорсткого способів закріплення торців зміна закону модуля пружності не впливає на їх розподіл. Збільшення довжини циліндрів призводить до зростання величини максимальних напружень в 1,3 раза для l=10 порівняно з довжиною l=6. Для циліндрів, довжина яких l=14, за шарнірного закріплення торців величина напружень змінюється не суттєво, а у випадку жорсткого закріплення – приблизно на 8%.

Параболічна форма кривих розподілу як колових, так і радіальних напружень, що має місце у випадку шарнірного закріплення торців в усіх перерізах радіальної координати, порушується для жорсткого закріплення торців, а монотонність спаду поблизу торців – при збільшенні довжини.

У середньому перерізі радіальної координати при збільшенні довжини циліндрів спостерігається вплив матеріалу на розподіл радіальних напружень (рис. 4).

При цьому зона впливу зменшується в напрямку середини інтервалу довжини для обох варіантів закріплення торців. Крім того, у випадку жорсткого закріплення торців перепад значень напружень по довжині циліндра в зоні торців і середнього перерізу стає більшим зі збільшенням довжини для l=6 приблизно вдвічі, для l=10 у 2,2 раза і для l=14 приблизно у 2,4 раза.

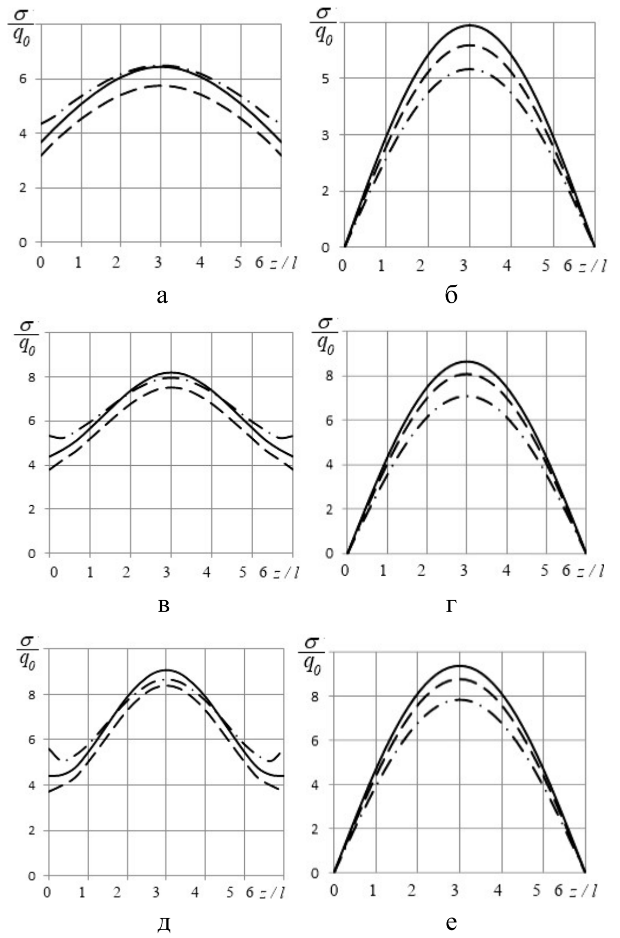

Рис. 5. Розподіл колових і радіальних напружень вздовж довжини циліндрів у перерізі r=0

У перерізі r=0 (рис. 5), де колові і радіальні напруження мають однакові значення, на їх величину у кількісному й якісному відношенні впливають як матеріал, довжина циліндра, так і спосіб закріплення торців.

Якщо на зовнішній поверхні максимальні значення мають напруження для зростаючого закону зміни модуля пружності, то в перерізі r=0 – для усередненого. Причому при шарнірному закріпленні торців для коротких циліндрів l=6 максимальна величина напружень зменшується приблизно на 18% для зростаючого і у 1,2 раза для спадного закону зміни модуля Юнга порівняно з усередненим.

У випадку жорсткого закріплення торців на торцях циліндра максимальні значення напружень мають місце для спадного закону зміни модуля Юнга, а їх величина зменшується приблизно в 1,2 раза порівняно з усередненим законом зміни модуля пружності і в 1,4 раза порівняно із зростаючим законом зміни модуля Юнга.

У межах одного закону зміни модуля пружності, збільшення довжини циліндра призводить до збільшення максимальної величини напружень в 1,3 раза при жорсткому і в 1,5 раза при шарнірному для l=10, в 1,4 раза при жорсткому і в 1,6 раза при шарнірному для l=14 порівняно з відповідними значеннями для l=6.

Висновки

1. У рамках лінійної теорії пружності для вісесиметричного тіла розв'язано задачу про напружений стан суцільних циліндрів, виконаних із неперервно-неоднорідного матеріалу, які знаходяться під дією рівномірного нормального навантаження за різних способів закріплення торців. При цьому застосовується підхід, що базується на використанні методу відокремлення змінних за допомо-

гою сплайн-апроксимації функцій в напрямку поздовжньої координати і чисельного розв'язання отриманої одномірної крайової задачі стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

2. Завдяки використанню відповідних граничних переходів розкрито невизначеність (0/0) деяких компонентів системи звичайних диференціальних рівнянь, що розв'язується, у геометрично особливій точці циліндра (r=0).

3. Проведено аналіз характеристик напруженого стану розглядуваних циліндрів для полів розподілу колових і радіальних напружень залежно від закону зміни модуля пружності, довжини циліндрів і способу закріплення торців.

4. Встановлено, що найбільший вплив закону зміни модуля Юнга на напружений стан циліндрів має місце для колових напружень на зовнішній поверхні в середньому перерізі довжини для обох способів закріплення торців. Крім того, вплив матеріалу спостерігається для колових і радіальних напружень на торцях для коротких циліндрів ($l=6l_0$) за жорсткого способу закріплення торців. Порівняно з усередненим законом їх величина зменшується приблизно у 5 разів для спадного і збільшується приблизно у 3 рази для зростаючого закону зміни модуля пружності.

5. За умов жорсткого закріплення торців мають місце крайові ефекти на торцях, які залежать від довжини циліндрів.

Результати, отримані в роботі, можуть бути використані при розрахунках на міцність і надійність елементів конструкцій та деталей машин подібного типу.

Література

1. Jin G., Wang Z., Liang D., Wei Z., Chang B., Zhou Y. Modeling and dynamics characteristics analysis of six-bar rocking feeding mechanism with lubricated clearance joint. *Archive of Applied Mechanics*. 2023. Vol. 93. P. 2831–2854. https://doi.org/10.1007/s00419-023-02410-7.
2. Mendil F., Bechir H. Methia M. Effect of nonhomogeneity on compression of solid circular cylinders made of functionally graded incompressible neo-Hookean materials. *Meccanica*. 2024. Vol. 59. P. 1625–1638. https://doi.org/10.1007/s11012-024-01852-9.
3. Shaldyrvan V. A., Sumtsov A. A., Soroka V. A. Study of stress concentration in short hollow cylinders of transversely isotropic materials. *International Applied Mechanics*. 1999. Vol. 35. Iss. 7. P. 678–683. https://doi.org/10.1007/BF02682205.
4. Hu W., Xu T., Feng J., Shi L., Zhu J., Feng J. Exact static axisymmetric solutions of thick functionally graded cylindrical shells with general boundary conditions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024. Vol. 31. Iss. 5. P. 990–1005. https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2129113.
5. Mognhod Bezzie Y., Woldemichael D. E. Effects of graded-index and Poisson's ratio on elastic-solutions of a pressurized functionally graded material thick-walled cylinder. *Forces in Mechanics*. 2021. Vol. 4. Article 100032. https://doi.org/10.1016/j.finmec.2021.100032.
6. Токова Л. П., Ясінський А. В. Напружений стан багатошарового неоднорідного циліндра за рівномірного стиску бічної поверхні. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2013. Т. 11. С. 101–107.
7. Токова Л. П., Ясінський А. В. Наближений розв'язок одновимірної задачі теорії пружності для неоднорідного суцільного циліндра. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58. № 4. С. 107–112.
8. Токовий Ю. В. Інтегрування рівнянь плоских осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для суцільних шаруватих циліндрів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2022. Т. 65. № 1–2. С. 136–145.
9. Ревенко В. П. Дослідження напружено-деформованого стану скінченного циліндра під дією зусиль стиску. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2010. Т. 46. № 3. С. 42–46.
10. Chekurin V. F., Postolaki L. I. Axially symmetric elasticity problems for the hollow cylinder with the stress-free ends. Analytical solving via a variational method of homogeneous solutions. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. Vol. 7. No. 1. P. 48–63. https://doi.org/10.23939/mmc2020.01.048.
11. Sirsat A. V., Padhee S. S. Analytic solution to isotropic axisymmetric cylinder under surface loadings problem through variational principle. *Acta Mechanica*. 2024. Vol. 235. P. 2013–2027. https://doi.org/10.1007/s00707-023-03825-7.
12. Семенюк М. П., Трач В. М., Подворний А. В. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки. *Прикладна механіка*. 2023. Т. 59. № 1. С. 91–102.
13. Daghia F., Baranger E., Tran D.-T., Pichon P. A hierarchy of models for the design of composite pressure vessels. *Composite Structures*. 2020. Vol. 235. Article 111809. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111809.
14. Ganendra B., Prabowo A. R., Muttaqie T., Adiputra R., Ridwan R., Fajri A., Do Q. T., Carvalho H., Baek S. J. Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on

the loading response. *Curved and Layered Structures*. 2023. Vol. 10. Iss. 1. Article 20220202. https://doi.org/10.1515/cls-2022-0202.

15. Pabyrivskyi V. V., Pabyrivska N. V., Pukach P. Ya. The study of mathematical models of the linear theory of elasticity by presenting the fundamental solution in harmonic potentials. *Mathematical Modeling and Computing*. 2020. Vol. 7. No. 2. P. 259–268. https://doi.org/10.23939/mmc2020.02.259.
16. Senapati A., Jena S. R. A computational scheme for fifth order boundary value problems. *International Journal of Information Technology*. 2022. Vol. 14. P. 1397–1404. https://doi.org/10.1007/s41870-022-00871-7.
17. Ігнатченко М. С., Кудін О. В., Гнездовський О. В. Об'єктно-орієнтована реалізація бібліотеки скінченно-елементного аналізу мовою програмування Python. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2020. № 1. С. 138–147. https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-18.
18. Луговой П. З., Скосаренко Ю. В., Орленко С. П., Шугайло А. П. Применение метода сплайн-коллокации для решения задач статики и динамики многослойных цилиндрических оболочек с конструктивными и технологическими особенностями. *Прикладная механика*. 2019. Т. 55. № 5. С. 78–88.
19. Shafei E., Faroughi S., Reali A. An isogeometric FSDT approach for the study of nonlinear vibrations in truncated viscoelastic conical shells. *Engineering with Computers*. 2024. Vol. 40. P. 1637–1651. https://doi.org/10.1007/s00366-023-01885-w.
20. Григоренко А. Я., Яремченко С. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных полых цилиндров в пространственной постановке на основании различных подходов. *Прикладная механика*. 2019. Т. 55. № 5. С. 39–46.
21. Григоренко Я. М., Григоренко А. Я., Рожок Л. С. К решению задачи о напряженном состоянии сплошных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. *Прикладная механика*. 2006. Т. 42. № 6. С. 24–31.
22. Saranen J., Vainikko G. Spline Approximation Methods. In: Periodic Integral and Pseudodifferential Equations with Numerical Approximation. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. P. 401–440. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04796-5_13.
23. Григоренко Я. М., Григоренко О. Я., Рожок Л. С. Напружений стан нетонких циліндричних оболонок близьких до кругових з неперервно-неоднорідних матеріалів. *Прикладна механіка*. 2022. Т. 58. № 4. С. 12–20.

Надійшла до редакції 04.02.2025