

УДК 539.3

ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

¹ Т. М. Альошечкіна, atn4042@gmail.com

ORCID: 0000-0001-7234-1558

² Н. А. Українець, n.ukrayinets@khai.edu

ORCID: 0000-0001-7406-5809

² В. Ю. Мірошніков, д-р техн. наукv.miroshnikov@khai.edu

ORCID: 0000-0002-9491-0181

¹ Харківський національний
університет міського господарства
ім. О. М. Бекетова,
61002, Україна, м. Харків,
вул. Чорноглезівська, 17

² Національний аерокосмічний
університет «Харківський
авіаційний інститут»,
61070, Україна, м. Харків,
вул. Вадима Манька, 17

В аерокосмічній галузі й машинобудуванні використовуються елементи, навантаження на які описується періодичними функціями. У задачах для шару з циліндричними неоднорідностями врахування таких навантажень є складним. З огляду на це існує необхідність створити методику розрахунку напруженого стану для шару з циліндричною порожниною, за якою бралися до уваги й граничні умови у вигляді періодичної функції. У роботі запропоновано розв'язання задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною у рамках узагальненого методу Фур'є. На верхній межі шару й на поверхні циліндричної порожнини задані напруження, а на нижній межі шару – переміщення. Шар і циліндрична порожнина розглядаються в різних системах координат (у декартовій та циліндричній). До рівнянь Ламе застосовуються функції перерозподілу узагальненого методу Фур'є. Задачу зведено до суми двох розв'язків – додаткової задачі й основної. Обидві задачі зведені до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких допускається застосування методу редукції. Після знаходження невідомих у додатковій задачі обчислюється напруження в місці геометричного розташування порожнини. Основна задача розв'язується для шару з порожниною, на якій задані зі зворотнім знаком напруження, отримані з додаткової задачі. Повне рішення складається з додаткової та основної задач. Розрахувавши всі невідомі, можна отримати напружено-деформований стан у будь-якій точці тіла із заданою точністю. Чисельний аналіз напруженого стану показав високу точність виконання граничних умов і залежність від періодичного навантаження. Так, напруження σ_x та σ_z на верхній межі шару мають екстремуми в місцях максимальних значень σ_y і збільшуються їх від'ємні значення в місці розташування порожнини. Напруження σ_x при цьому перевищують задані σ_y .

Ключові слова: періодичне навантаження, шар з циліндричною порожниною, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.

Вступ

При проектуванні різного роду технологічного обладнання в машинобудуванні, конструкцій в літальних апаратах, будівництві часто виникає необхідність врахування періодичного навантаження. Однак це пов'язано з низкою складнощів. Пояснюється сказане тим, що однією з основних рис цього виду навантаження є нескінченність, яка не може бути врахована програмними комплексами, заснованими на методі скінчених елементів [1, 2].

Інша проблема – розрахунок елементів, що мають циліндричні неоднорідності. Цьому напряму досліджень приділено багато уваги. На цей час існує ряд класичних робіт, присвячених аналітичному й аналітико-чисельному розв'язку задач для півпростору і шару з циліндричною порожниною [3–5]. Однак запропоновані класичні методи, засновані тільки на розкладу в ряд Фур'є, розглядають задачу або в плоскому вигляді, або з меншою трьох кількістю граничних умов.

У низці робіт розглядаються задачі для шару з перпендикулярно розташованими до нього неоднорідностями [6–11]. Так, науковці в роботах [6] і [7] вивчали шар, спрощуючи умови контакту на його верхній та нижній поверхнях. Однак такий підхід не дозволяє досліджувати шар із циліндричним включенням або порожниною, оскільки застосування інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є призводить до формулювання математичного завдання, при вирішенні якої розв'язуються виключно задача дифракції хвиль і не враховується геометрія включення/порожнини.

Застосування генетичного алгоритму (GA), алгоритму гравітаційного пошуку (GSA) й алгоритму Bat (BA) для аналізу напружень перфорованої пластини, як це зроблено в роботі [8], забезпечує лише наближене рішення.

У роботі [9] розглянуто задачу кручення пружного півпростору, що містить вертикальну циліндричну порожнину й навантажений коаксіальним штампом. Для розв'язання цієї задачі автори зробили два оригінальні методи, які дозволяють звести її до звичайних інтегральних рівнянь другого роду. Незважаючи на новизну підходу, отриманий розв'язок має наближений характер і демонструє деякі відхилення від розв'язку, відомого як задача Рейснера-Сагоці.

У роботі [10] запропоновано аналітичний метод розрахунку композитних ламінованих перфорованих пластин, що базується на методі шарового збивання. Ефективність і точність цього методу підтверджена шляхом порівняння отриманих результатів із результатами скінченно-елементного аналізу. Інша робота [11] присвячена дослідженню крутильних коливань плоского круглого штампа, який контактує з багатошаровою пружною основою, що містить вертикальну циліндричну порожнину. Для розв'язання цієї задачі використано інтегральне перетворення Вебера й метод парних інтегральних рівнянь. Важливо зазначити, що згадані методи [10, 11] не можуть бути застосовані для розв'язання задач із неоднорідностями, що розташовані паралельно шарам.

Для задач з поздовжньою циліндричною порожниною пропонується використати узагальнений метод Фур'є [12]. Його ефективність доведена в роботах [13–15] для циліндра з циліндричними порожнинами або включеннями, в яких розв'язання представлено у вигляді суперпозиції базисних розв'язків рівняння Ламе для циліндричної геометрії, де кожна система координат пов'язана з центром відповідної граничної поверхні тіла.

У роботі [16] представлено математичне обґрунтування формул переходу між декартовою й циліндричною системами координат у задачі для півпростору з циліндричною порожниною.

Задача для шару з циліндричною порожниною в переміщеннях розв'язана в роботі [17], у напруженнях – [18], змішаного типу – в [19]. Проте методи, запропоновані в роботах [17–19], можуть враховувати на границях тільки швидко спадаючі функції і не здатні враховувати нескінченні, такі як періодичні функції. Врахування періодичних переміщень у другій основній задачі (у напруженнях) для шару з циліндричною порожниною запропоновано в роботі [20].

Метою даної роботи є:

- створення методики розв'язання змішаної задачі теорії пружності, коли на верхній межі шару задана періодична функція напружень, на нижній межі шару – переміщення, на порожнині – напруження;
- проаналізувати напружений стан шару.

Постановка задачі

Моделлю є шар із циліндричною порожниною (рис. 1).

Шар розглядається в декартовій системі координат (x, y, z) , порожнина – у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) , яка однаково орієнтована й поєднана з системою координат шару. Відстань від центру координат до верхньої межі шару h , до нижньої $\tilde{h}$. Радіус порожнини R .

На верхній межі шару задані напруження $F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z)$, на нижній – переміщення,

$\vec{U}(x, z)|_{y=\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, на циліндричній порожнині – напруження $F\vec{U}(\varphi, z)|_{\rho=R} = \vec{F}_0^{(p)}(\varphi, z)$, де

$$\begin{aligned}\vec{F}_h^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(h)} \cdot \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \cdot \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \cdot \vec{e}_z; \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= U_x^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_x + U_y^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_y + U_z^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_z; \\ \vec{F}_0^{(p)}(\varphi, z) &= \sigma_\rho \cdot \vec{e}_\rho + \tau_{\rho\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z} \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

– відомі функції.

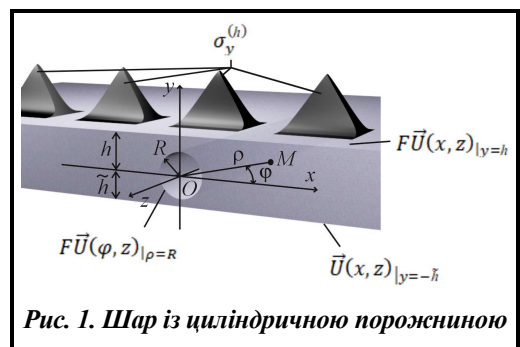


Рис. 1. Шар із циліндричною порожниною

Задані на верхній межі шару функції $\tau_{yx}^{(h)}$, $\sigma_y^{(h)}$, $\tau_{yz}^{(h)}$ є періодичними вздовж осі x та швидко спадають вздовж осі z . Інші задані функції є швидко спадаючими до нуля вздовж осі z для порожнини, а також по осі x і z для нижньої межі шару.

Метод розв'язання

Розв'язок рівняння Ламе $\Delta \vec{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0$ представлений у вигляді суми розв'язків двох задач $\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{U}_1$.

Перша задача ($\vec{U}_0$) – додаткова, введена для врахування заданої функції періодичних напружень. У цьому випадку розглядається шар без циліндричної порожнини із заданими на верхній межі шару періодичними напруженнями, на нижній межі шару – нульовими переміщеннями. Розв'язок має такий вигляд:

$$\vec{U}_0 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_{k,n}^{(0)}(\lambda) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu_n) + \tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu_n)) d\lambda, \quad (1)$$

де $H_{k,n}^{(0)}(\lambda)$, $\tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda)$ – невідомі, які необхідно знайти із граничних умов цієї допоміжної задачі; $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки рівняння Ламе для шару [12]:

$$\vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \quad k=1, 2, 3; \quad (2)$$

$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla$; $N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (v-1) \vec{e}_y^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot)$; $N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_z^{(1)} \cdot)$; $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$; $-\infty < \lambda, \mu < \infty$; $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – орти декартової системи координат; v – коефіцієнт Пуассона.

Для створення системи рівнянь у ліву частину (1) підставляємо відомі функції $\tau_{yx}^{(h)}$, $\sigma_y^{(h)}$, $\tau_{yz}^{(h)}$, попередньо представивши їх через ряд Фур'є вздовж осі x , і інтеграл Фур'є вздовж осі z

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{c}_h(\lambda, n) \cdot e^{i(\mu_n x + \lambda z)} d\lambda,$$

де

$$\vec{c}_h(\lambda, n) = \frac{1}{4\pi\ell} \int_{-\ell}^{\ell} dx \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_h^0(x, z) \cdot e^{-i(\mu_n x + \lambda z)} dz; \quad (3)$$

2ℓ – період функції; $\mu_n = n\pi / \ell$.

Звільнившись в правій і лівій частині від рядів, інтегралів та $e^{i(\mu_n x + \lambda z)}$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження $H_{k,n}^{(0)}(\lambda)$, $\tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda)$

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^3 H_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^+(h; \lambda, \mu_n) + \sum_{s=1}^3 \tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^-(h; \lambda, \mu_n) = \vec{c}_h(\lambda, n) \\ \sum_{s=1}^3 H_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^+(-\tilde{h}; \lambda, \mu_n) + \sum_{s=1}^3 \tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda) \vec{d}_s^-(-\tilde{h}; \lambda, \mu_n) = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

де $\vec{d}_s^{\pm}(y; \lambda, \mu_n) = N_k^{(d)} \cdot e^{\pm \gamma y}$.

Рівняння (4) спроектоване на осі координат (прирівняні проекції при базисних векторах $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) і виражені $H_{k,n}^{(0)}(\lambda)$ та $\tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda)$

$$H_{j,n}^{(0)}(\lambda) = \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,j}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \cdot \vec{e}_k; \quad \tilde{H}_{j,n}^{(0)}(\lambda) = \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,j+3}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \cdot \vec{e}_k,$$

де $j = 1, 2, 3$; $A_{1\dots 6, 1\dots 6}$ – алгебраїчне доповнення системи рівнянь; D – визначник системи рівнянь.

Після визначення невідомих $H_{k,n}^{(0)}(\lambda)$ та $\tilde{H}_{k,n}^{(0)}(\lambda)$, знаходимо напруження в місці геометричного розташування порожнини. Для цього застосовуємо формули переходу від базисних розв'язків шару ($\vec{u}_k^{(+)}$ та $\vec{u}_k^{(-)}$) до внутрішніх базисних розв'язків циліндру ($\vec{R}_{k,m}$) [12]

$$\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \vec{R}_{k,m}, \quad (k=1, 3);$$

$$\vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \vec{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma)\vec{R}_{3,m} \right) \right],$$

де $\vec{R}_{k,m} = \tilde{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi_p + \lambda z)}$; $\tilde{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\vec{e}_\varphi \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_z \right)$;

$$\tilde{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_\rho \cdot [(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho)] + \vec{e}_\varphi i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \vec{e}_z i\lambda\rho I'_n(\lambda\rho);$$

$$\tilde{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\vec{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_\varphi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right]; \quad \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z - \text{орти циліндричної системи координат.}$$

Звільнившись від інтеграла по λ та $e^{i(\lambda z + m\varphi)}$, отримано напруження в місці геометричного розташування порожнини

$$\vec{h}_m^0(\rho, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=1}^3 \left(r_{n,j}(R; m, \lambda) \cdot f_{k,n}^m(\lambda, \mu_n) \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,s}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \right) + \sum_{s=1}^3 \left(r_{n,j}(R; m, \lambda) \cdot \tilde{f}_{k,n}^m(\lambda, \mu_n) \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{A_{k,s+3}}{D} (\vec{c}_h(\lambda, n)) \right) \right],$$

$$\text{де } f_{k,n}^m(\lambda, \mu) = (i \cdot \omega_-(\lambda, \mu))^m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m\mu & \gamma & 4\mu(1-\sigma) \\ \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{f}_{k,n}^m(\lambda, \mu) = (i \cdot \omega_+(\lambda, \mu))^m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m\mu & -\gamma & 4\mu(1-\sigma) \\ \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$r_{n,j}(R; m, \lambda)$ – тензор, отриманий при застосуванні оператора напруження до $\vec{R}_{k,m}$; $\vec{c}_h(\lambda, n)$ – подані в формулі (3).

Основна задача ($\vec{U}_1$) розглядає шар з циліндричною порожниною із заданими на поверхні порожнини зі зворотним знаком напруженнями $\vec{h}_m^{(0)}(\rho, \lambda)$. Розв'язок для $\vec{U}_1$ має такий вигляд [19]:

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu \cdot d\lambda,$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}(\lambda)$ – це невідомі, які необхідно знайти; $\vec{u}_k^{(+)}(y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки (2); $\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$ – базисні розв'язки ззовні циліндра [12]

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \cdot \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right], \quad k=1, 2, 3;$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(v-1) \left(\nabla - \vec{e}_z^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_z^{(2)}); \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Методика розв'язання цієї основної задачі співпадає з [12].

Після знаходження всіх невідомих для $\vec{U}_0$ і $\vec{U}_1$, застосовуючи формули переходу базисних розв'язків між декартовою і циліндричною системами координат, можна отримати напружено-деформований стан у будь-якій точці шару.

Чисельні дослідження напруженого стану

Пружний ізотропний шар має циліндричну порожнину радіусом $R=10$ мм (рис. 1). Фізичні характеристики шару: алюмінієвий сплав Д16Т, коефіцієнт Пуассона $\nu_0=0,3$, модуль пружності $E_0=7,1 \times 10^4$ МПа. Геометричні параметри моделі: $h=\tilde{h}=16$ мм.

На верхній межі шару вздовж осі x задана періодична функція напружень у вигляді трикутників вздовж осі x і хвилі вздовж осі z

$$\sigma_y^{(h)}(x, z) = \begin{cases} -\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot (10^4 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2}), & \text{при } 0 \leq |x| \leq 2 \\ 0, & \text{при } 2 < |x| < \pi \end{cases}$$

та дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на нижній межі задані переміщення $U_x^{(\tilde{h})} = U_y^{(\tilde{h})} = U_z^{(\tilde{h})} = 0$, на поверхні порожнини напруження $\sigma_\rho^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(p)} = 0$. Зображення функції $\sigma_y^{(h)}(x, z)$ через ряд Фур'є по

осі x і інтеграл Фур'є по осі z , має вигляд $f(x; \lambda, n) = -\left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 \cos nx\right)\right] \cdot [2,5e^{-|\lambda|10} (|\lambda|10 + 1)]$.

Нескінченна система рівнянь була зведена до скінченної по параметру $m=6$ і $n=35$. Точність виконання граничних умов за вказаних значень геометричних параметрів 10^{-4} для значень, які дорівнюють нулю.

На рис. 2 представлені напруження σ_x та σ_z на верхній межі шару, які виникають під дією заданої на цій поверхні періодичної функції σ_y .

Від заданого періодичного навантаження на верхній межі в області циліндричної порожнини виникають стискаючі напруження σ_x та σ_z (рис. 2). Напруження σ_x мають максимальне значення $\sigma_{x,\max} = -1,1689$ МПа при $x=0$, що перевищує задані $\sigma_y=1$ МПа. Це зумовлено зосередженням у зоні циліндричної порожнини трьох трикутних навантажень із періодичної функції.

На рис. 2 видно, що від'ємні значення напруження σ_x та σ_z в області порожнини значно збільшуються.

Напруження σ_x і σ_z мають екстремуми в місцях максимальних значень σ_y (рис. 2). При $\sigma_y=0$, напруження σ_x отримують додатні значення.

На рис. 3 представлені напруження σ_x та σ_z при $x=0$ на верхній межі шару вздовж осі z .

При $z=0$ напруження σ_x набувають максимального значення (рис. 3), що співпадає з рис. 2. Незалежно від z ці напруження постійно стискаючі.

Напруження σ_z , крім від'ємних значень у зоні максимального навантаження мають додатні значення в зоні затухання σ_y . Різниця функцій по осі x і по осі z також впливає на різницю максимальних значень напружень σ_x і σ_z (рис. 3).

На рис. 4 представлені напруження σ_ϕ і σ_z на поверхні циліндричної порожнини при $z=0$.

На поверхні циліндричної порожнини напруження σ_ϕ отримують максимальні значення під кутами $\phi=0,585$ і $\phi=2,55$, $\sigma_{\phi \max}=0,49727$ МПа (рис. 4). При $\phi=\pi/2$ напруження σ_ϕ мають додатні, але мінімальні значення.

Напруження σ_z на поверхні циліндричної порожнини отримують максимальні значення при $\phi=\pi/2$ (рис. 4).

Напруження σ_ρ , σ_ϕ і σ_z на перехідку між циліндричною порожниною і верхньою межею шару представлені на рис. 5.

При $y=10$ напруження $\sigma_\rho=0,00003$, при $y=16$ напруження $\sigma_\rho=0,99995$ (рис. 5), що відповідає заданому і співпадає з напруженнями σ_y з точністю 10^{-4} .

Напруження σ_ϕ і σ_z мають екстремальні значення при $y=10$ та $y=16$ (рис. 5), що співпадає із значеннями на рис. 3 та рис. 4.

Розподіл напружень σ_ρ , σ_ϕ та σ_z вздовж перехідку має нелінійний характер.

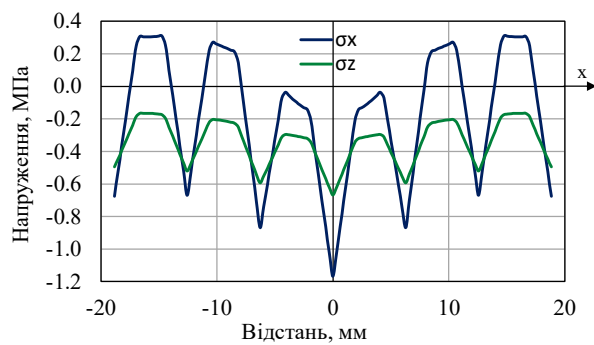


Рис. 2. Напруження σ_x та σ_z на верхній межі шару вздовж осі x

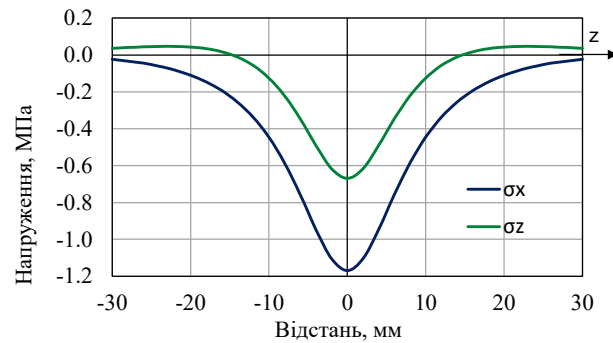


Рис. 3. Напруження σ_x та σ_z на верхній межі шару вздовж осі z

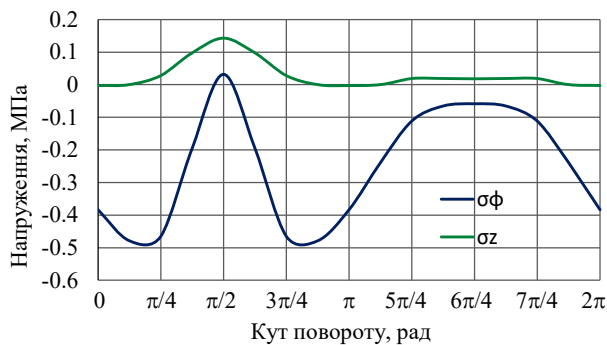


Рис. 4. Напруження σ_ϕ та σ_z на поверхні циліндричної порожнини

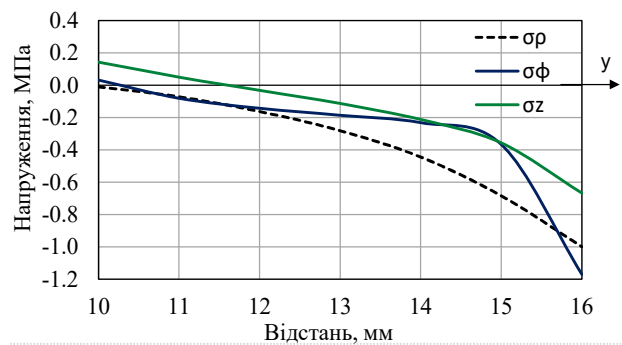


Рис. 5. Напруження σ_r , σ_ϕ і σ_z від поверхні порожнини до верхньої межі шару вздовж осі y

Висновки

Запропоновано методику врахування періодичних навантажень у змішаній задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною в рамках узагальненого методу Фур'є. Наведена додаткова задача дає можливість замість інтегрування заданої функції розкласти її в ряд Фур'є.

Знайдено напружений стан для шару з циліндричною порожниною при заданих на верхній межі шару напруженнях (періодична функція), на нижній межі – переміщеннях, на поверхні порожнини – напруженнях.

Аналіз напруженого стану показав залежність його від періодичного навантаження. Так, напруження σ_x та σ_z на верхній межі шару мають екстремуми в місцях максимальних значень σ_y , а їх від'ємні значення збільшуються в місці розташування порожнини. Напруження σ_x при цьому перевищують задані σ_y .

Задачу зведено до суми двох розв'язків – додаткової задачі й основної. Обидві задачі зведені до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що допускає застосування до них методу редукції. Базисні розв'язки в різних системах координат поєднані за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур'є. Це дозволило отримати розв'язок задачі із заданою точністю.

Запропонований метод розв'язання дає можливість отримувати результати напружено-деформованого стану для конструкцій літальних апаратів, будівельних конструкцій, технологічних машинобудівних ліній, навантажень на які задані періодичними функціями.

У подальшому (з метою розвитку означеної теми досліджень) необхідно розглянути моделі з циліндричними вклученнями, а також із декількома циліндричними порожнинами.

Література

1. Tekkaya A. E., Soyarslan C. Finite element method. In: Laperrière L., Reinhart G. (eds) CIRP Encyclopedia of Production Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699.

2. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation>.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
5. Grinchenko V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Soviet Applied Mechanics*. 1968. Vol. 4. Iss. 10. P. 31–37. <https://doi.org/10.1007/BF00886618>.
6. Fesenko A., Vaysfel'd N. The wave field of a layer with a cylindrical cavity. In: Gdoutos, E. (eds) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Structural Integrity*. Cham: Springer, 2019. Vol. 8. P. 277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.
7. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 2021. Vol. 33. P. 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.
8. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2022. Vol. 304. Part 2. Article 116403. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.
9. Malits P. Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021. Vol. 89. Article 104308. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308>.
10. Khechai A., Belarbi M.-O., Bouaziz A., Rekbi F. M. L. A general analytical solution of stresses around circular holes in functionally graded plates under various in-plane loading conditions. *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234. P. 671–691. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03413-1>.
11. Snitser A. R. The reissner-sagoci problem for a multilayer base with a cylindrical cavity. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. Vol. 82. Iss. 3. P. 3439–3443. <https://doi.org/10.1007/bf02362661>.
12. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
13. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P. 148–158. <https://doi.org/10.1134/S1995423915020068>.
14. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. P. 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/S0021894416060237>.
15. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. P. 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.
16. Ukrayinets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 2. No. 7 (110). P. 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.
17. Мірошніков В. Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 102. С. 77–90. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>.
18. Мірошніков В. Ю., Денисова Т. В., Проценко В. С. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 103. С. 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.
19. Miroshnikov V. Yu. Stress state of an elastic layer with a cylindrical cavity on a rigid foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 372–381. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x>.
20. Miroshnikov V., Younis B., Savin O., Sobol V. A linear elasticity theory to analyze the stress state of an infinite layer with a cylindrical cavity under periodic load. *Computation*. 2022. Vol. 10. Iss. 9. Article 160. <https://doi.org/10.3390/computation10090160>.

Надійшла до редакції 12.03.2025