

УДК 539.3

ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ Й ГЛАДКО КОНТАКТУЮЧОГО З ДВОМА ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВТУЛКАМИ

О. О. Ільїн

parfumer.ua@gmail.com

ORCID: 0009-0005-7852-9873

Національний
аерокосмічний університет
«Харківський
авіаційний інститут»,
61070, Україна, м. Харків,
вул. Вадима Манька, 17

Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару з n поздовжніми циліндричними порожнинами, дві з яких містять товстостінні труби, гладко контактуючі з шаром. На поверхнях шару, внутрішніх поверхнях труб і порожнинах задані напруження. Усі канонічні поверхні між собою не перетинаються. Матеріал шару й циліндричних труб однорідний та ізотропний. Запропоновано аналітико-числову методику розрахунку, яка передбачає виконання умов статички (для першої основної задачі теорії пружності) та базується на рівнянні Ламе. Базисні розв'язки рівняння Ламе беруться у формі, що дає можливість у кожній окремій системі координат отримати точний розв'язок для певної граничної поверхні. Базисні розв'язки в цих системах координат (для шару – декартова, для циліндричних неоднорідностей – локальні циліндричні) пов'язані між собою математичним апаратом узагальненого методу Фур'є. Виконання граничних умов на верхній та нижній поверхнях шару, на внутрішніх поверхнях труб, на циліндричних порожнинах, а також врахування умов спряження створюють нескінчену систему інтегро-алгебраїчних рівнянь, яка зведена до нескінченної лінійної. У чисельному дослідженні до отриманої нескінченної лінійної алгебраїчної системи рівнянь застосовується метод редукції. Розв'язання системи рівнянь дає значення невідомих функцій. Чисельні розрахунки показали швидку збіжність наближених розв'язків до точного. Проведений чисельний аналіз напруженого стану шару і товстостінних труб показав, що застосування поліамідних втулок, в порівнянні з їх відсутністю, майже не впливає на напружено-деформований стан конструкції, застосування сталевих втулок зменшує напруження в середині шару в областях їх розташування, перерозподіляючи напруження на самі втулки. Запропонований метод розв'язання дає можливість отримувати напружено-деформований стан конструкції, що містять циліндричні порожнини і втулки, а проведений чисельний аналіз дозволяє оцінити вплив матеріалу на величини розподілення напружень у конструкціях машин і механізмів на етапі проектування.

Ключові слова: волокнистий композит, узагальнений метод Фур'є, рівняння Ламе, шар з циліндричними включеннями.

Вступ

Втулки є важливими компонентами в машино- й авіабудуванні, вони використовуються для зменшення тертя між рухомими частинами, забезпечують стабільність і вирівнювання, допомагають запобігти зносу й пошкодженню критично важливих компонентів конструкцій. Втулки використовуються в шарнірних з'єднаннях поверхонь керування для забезпечення плавного й контрольованого руху, для кріплення двигуна до планера літака, зменшуючи вібрацію та передаючи навантаження, встановлюються в місцях з'єднання тяг і важелів, що передають зусилля від органів керування до поверхонь керування.

Також вони застосовують для посилення деталей з отворами. Це особливо актуально в тих випадках, коли деталь піддається значним навантаженням, а отвір послаблює її конструкцію. Втулка, встановлена в отвір, розподіляє навантаження на більшу площу, зменшуючи концентрацію напружень навколо отвору. У деяких випадках втулки встановлюють для забезпечення більш точної посадки з'єднувальних деталей в отвори. Це важливо в механізмах, де потрібна висока точність позиціонування. Втулки також використовують для ремонту пошкоджених або зношених отворів.

У машино- й авіабудуванні використовуються високоміцні й зносостійкі матеріали для виготовлення втулок, здатні витримувати екстремальні умови експлуатації, включаючи високі й низькі температури, значні навантаження й вібрацію, а також здатні знизити рівень шуму й підвищити комфорт. До основних матеріалів належать: сталь, бронза, алюміній, тефлон, поліамід та інші полімери.

Моделі ряду конструкцій можуть бути представлені у вигляді шару з циліндричними трубами й порожнинами. Під час проектування таких конструкцій потрібно мати розподіл напружень в їх ок-

ремих частинах. Проте розрахункові моделі подібних з'єднань часто виявляються складними і не можуть бути розраховані класичними аналітичними методами [1–3], які розглядають задачу або в плоскому формулюванні, або з кількістю граничних умов, не більше трьох.

Інший підхід, який часто застосовують до розрахунку даних конструкцій, – це чисельні методи: метод скінчених елементів [4–6], метод граничних елементів [7], метод скінчених різниць [8]. Однак вони наближені і мають ряд відомих недоліків: неможливість врахування нескінчених елементів, похибки апроксимації, проблеми збіжності й стійкості розрахунку, значні обчислювальні ресурси, неможливість отримати аналітичний вираз, який описував би залежність розв'язку від параметрів задачі, чутливість до вибору початкових умов. Також важливо мати теоретичне розуміння задачі або результати натурних випробувань [9, 10], щоб інтерпретувати чисельні результати.

Аналітико-числові методи є гібридними підходами для розв'язання задач і включають як аналітичні (точні), так і числові (наближені) методи. Ці методи часто використовуються для отримання більш точних результатів у складних задачах, де суто аналітичний або суто числовий підхід може бути неефективним або занадто складним.

Прикладом гібридного підходу є робота [11], де експериментально визначено зміщення для розрахунку композитних пластин під ударним навантаженням, після чого параметри вектора переміщення для кожного шару розкладаються у степеневий ряд по поперечній координаті. Проте такий підхід не може враховувати поздовжніх циліндричних неоднорідностей.

Розв'язок задачі про шар із перпендикулярно розташованою циліндричною порожниною, представлений у роботах [12, 13], базується на інтегральних перетвореннях Лапласа і скінчених перетвореннях Фур'є. Однак цей метод не дозволяє аналізувати системи з більш ніж однією циліндричною порожниною.

У роботі [14] для оптимізації теплових напружень у композитних пластинах із некруглими отворами використано метаевристичні алгоритми й аналітичні методи, але цей метод не може працювати з більш ніж однією циліндричною порожниною.

Розрахунок шару з декількома циліндричними неоднорідностями, розташованими паралельно його межах, ефективно здійснюється за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур'є [15], що ґрунтується на комбінації базисних розв'язків рівняння Ламе в різних системах координат. Він уже застосовувався для розв'язання задач для циліндра з циліндричними порожнинами [16, 17] і включеннями [18]. У роботі [19] представлено обґрунтування формул переходу між декартовою й циліндричною системами координат на прикладі півпростору з циліндричною порожниною.

Задачі для шару з однією циліндричною порожниною за допомогою узагальненого методу Фур'є в переміщеннях розв'язані у [20], у напруженнях – [21], або розглянуті як мішані задачі [22]. Задачі для шару з однією трубою розв'язані в роботах [23, 24]. Однак методи, що використовуються у [20–24], не дозволяють розв'язати задачу для декількох циліндричних неоднорідностей.

У роботі [25] метод розвинуто і розв'язано задачу для шару з двома циліндричними порожнинами, а у [26] – із двома циліндричними трубами при мішаних граничних умовах. У роботі [27] запропоновано розв'язок першої основної задачі теорії пружності для шару з двома циліндричними трубами. Проте представлений у [26, 27] підхід не дозволяє врахувати додаткових циліндричних порожнин.

З огляду на сказане пошук методів розв'язання задач для шару з циліндричними втулками і циліндричними порожнинами є актуальним.

Метою даної роботи є:

- створення методики розв'язання першої основної задачі теорії пружності (у напруженнях) для шару, гладко контактуючого з двома поздовжніми циліндричними трубами й послабленого n циліндричними порожнинами;
- визначення напруженого стану шару з однією циліндричною порожниною і двома товстостінними трубами при збалансованому навантаженні;
- визначення впливу наявності циліндричних втулок на напружено деформований стан шару шляхом проведення порівняльного аналізу з варіантом, коли замість товстостінних труб розташовані порожнини [28].

Постановка задачі

Досліджувана модель складається з шару, в якому паралельно до його меж розташовані дві товстостінні циліндричні труби й n циліндричних порожнин (рис. 1). Труби й порожнини розглядаються в локальних циліндричних координатах ρ_p, φ_p, z , де $p=1$ позначає першу трубу, $p=2$ – другу трубу, $p=3 \dots n+2$ – порожнину з номером $p-2$. Шар розглядається в декартовій системі координат (x, y, z) , яка збігається з системою координат першої труби ($p=1$). Зовнішні радіуси труб і порожнин позначено R_p . Внутрішні радіуси труб – r_p . Відстань від центру декартової системи координат до меж шару $y=h$ та $y=-\tilde{h}$.

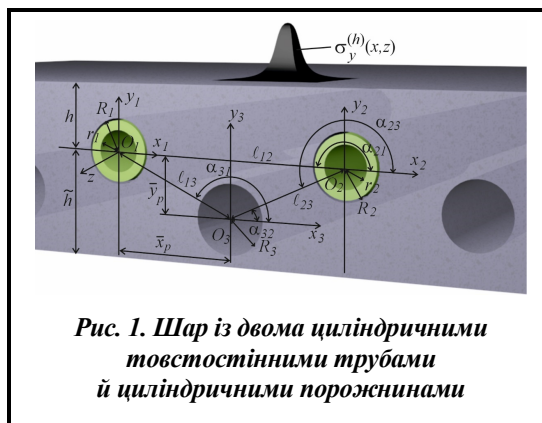


Рис. 1. Шар із двома циліндричними товстостінними трубами й циліндричними порожнинами

Задані напруження: на верхній та нижній межах шару

$$F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z); \quad F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z),$$

де

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \tau_{yx}^{(h)} \cdot \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \cdot \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \cdot \vec{e}_z; \quad \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_z; \quad (1)$$

на внутрішніх поверхнях труб задані напруження

$$F\vec{U}_0^{(p)}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} = \sigma_p^{(p)} \vec{e}_p + \tau_{\rho\varphi}^{(p)} \vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z}^{(p)} \vec{e}_z; \quad p=1, 2; \quad (2)$$

на поверхні циліндричних порожнин

$$F\vec{U}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} = \vec{F}_p^0(\varphi_p, z) = \sigma_p^{(p)} \vec{e}_p + \tau_{\rho\varphi}^{(p)} \vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z}^{(p)} \vec{e}_z; \quad p=3, \dots, n+2, \quad (3)$$

де n – кількість порожнин; $\vec{U}$ – переміщення в шарі; $F\vec{U} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{div}} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}) \right]$ – оператор напруження.

Шар поєднаний з кожною трубою умовами спряження

$$\left. \begin{aligned} U_{0,p}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= U_{p,p}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} \\ \sigma_{0,p}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= \sigma_{p,p}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} \\ \tau_{0,\rho\varphi}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \\ \tau_{p,\rho\varphi}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \\ \tau_{0,\rho z}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \\ \tau_{p,\rho z}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

де $U_{0,p}(\varphi_p, z)$ – нормальні переміщення для шару; τ_0 – дотичні напруження для шару; $U_{p,p}(\varphi_p, z)$ – нормальні переміщення для труб; τ_p – дотичні напруження для труб.

При цьому, виходячи з умов статки, повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\iint_{(\sigma)} \vec{F}(M) d\sigma = 0; \quad \iint_{(\sigma)} \vec{r} \times \vec{F}(M) d\sigma = 0,$$

де $\sigma = \{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3\}$; σ_1 – площина на $y=h$; σ_2 – площина на $y=-\tilde{h}$; σ_3 – поверхня циліндра $\rho=R_p$,

$$\vec{F}M = \begin{cases} \vec{F}_h^0(x, z) \text{ на } \sigma_1 \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) \text{ на } \sigma_2; \quad \vec{r} - \text{радіус вектор т. } M. \\ \vec{F}_R^0(\varphi, z) \text{ на } \sigma_3 \end{cases}$$

Усі задані функції будемо вважати спадаючими на нескінченності.

Методика розв'язання

Розв'язок рівнянь Ламе шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 = & \sum_{p=1}^{n+2} \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vec{U}_i = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(i)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(i)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) d\lambda, \quad (6)$$

де $\vec{U}_i$ – переміщення в i -тій трубці; $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(i)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(i)}(\lambda)$ – невідомі функції, які необхідно знайти з крайових умов (1)–(3) й умов спряження (4); $\vec{S}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки рівняння Ламе, які представлено у вигляді [15]:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m \varphi)}; \quad \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} [(sign \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m \varphi)}]; \quad k=1, 2, 3; \\ N_1^{(d)} &= \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (v-1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); \\ N_1^{(p)} &= \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(v-1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}; \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty, \end{aligned}$$

де v – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Для запису рівнянь (5) та (6) в одній системі координат, застосовані формули переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе [11]:

– від зовнішніх розв'язків для циліндра $\vec{S}_{k,m}$ до розв'язків для шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\vec{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned} \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \vec{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3; \\ \vec{S}_{2,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \vec{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \vec{u}_2^{(\mp)} \pm 4\mu(1-\sigma) \vec{u}_3^{(\mp)} \right) \cdot \frac{e^{-i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (7)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– від розв'язків для шару $\vec{u}_k^{(+)}$ та $\vec{u}_k^{(-)}$ до внутрішніх розв'язків для циліндра $\vec{R}_{k,m}$

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \vec{R}_{k,m}, \quad k=1, 3; \\ \vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \vec{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \vec{R}_{3,m} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

де $\vec{R}_{k,m} = \vec{\tilde{b}}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi_p + \lambda z)}$; $\vec{\tilde{b}}_{1,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda \rho) + i \cdot I_n(\lambda \rho) \cdot \left(\vec{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda \rho} + \vec{e}_z \right)$;

$\vec{\tilde{b}}_{2,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_{\rho} \cdot [(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda \rho) + \lambda \rho I''_n(\lambda \rho)] + \vec{e}_{\varphi} \cdot i \cdot m \left(I'_n(\lambda \rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda \rho} I_n(\lambda \rho) \right) + \vec{e}_z \cdot i \lambda \rho I'_n(\lambda \rho)$;

$\vec{\tilde{b}}_{3,n}(\rho, \lambda) = \left[\vec{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda \rho) \frac{n}{\lambda \rho} + \vec{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda \rho) \right]$; $\vec{e}_{\rho}$, $\vec{e}_{\varphi}$, $\vec{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

– від розв'язків для циліндра з номером p до розв'язків для циліндра з номером q

$$\begin{aligned}\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, k=1, 2, 3; \\ \bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \quad \bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \tilde{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda); \\ \bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \tilde{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq})] \cdot \tilde{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},\end{aligned}\quad (9)$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{pq} ; $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Задовольняючи граничним умовам, сформована система інтегро-алгебраїчних рівнянь для пошуку невідомих функцій (5) та (6). Враховуючи громіздкість вказаної системи [29], у даній роботі вона опущена.

Перші шість рівнянь виведено шляхом застосування граничних умов до плоских поверхонь шару (1). Для цього оператор напружень застосовано до функцій (5), а подвійний інтеграл Фур'є – до рівняння (1), після чого отримані вирази прирівняли. Базисні розв'язки $\bar{S}_{k,m}$, задані в циліндричній системі координат, були перетворені в декартову систему $\bar{u}_k^{\pm}$ за допомогою формул переходу (7).

Шість додаткових рівнянь виникають при застосуванні граничних умов до внутрішніх поверхонь труб (2). Для цього оператор напружень застосовується до функцій (6), а отримані вирази прирівнюються до функцій (2), до яких попередньо застосовано інтеграл Фур'є по осі z і ряд Фур'є по куту φ .

По три рівняння граничних умов записані для кожної поверхні порожнини: до функцій (5) застосовано оператор напружень, а до (3) – інтеграл і ряд Фур'є, після цього вони прирівняні один до одного. Базисні розв'язки $\bar{u}_k^{\pm}$ з декартової системи координат, за допомогою формул переходу (8), переписані через $\bar{R}_{k,m}$ в циліндричну.

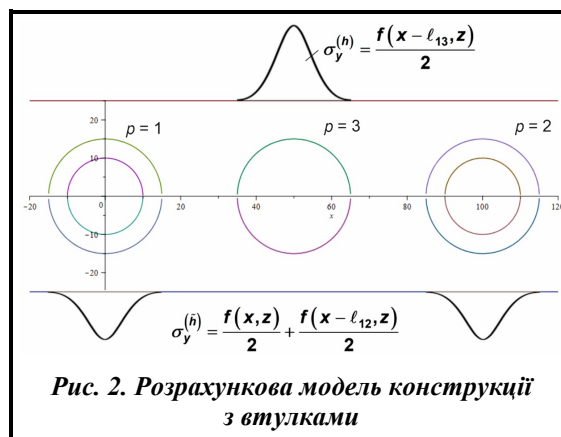
Додаткові 12 рівнянь виникають з умов спряження між шаром і кожною з двох труб. Для застосування цих умов базисні розв'язки $\bar{u}_k^{\pm}$, задані в декартовій системі координат, перетворюються в розв'язки $\bar{R}_{k,m}$ локальних циліндричних систем за допомогою функцій переходу (8). Також використовуються формули переходу (9) для базисних розв'язків між різними локальними циліндричними системами координат.

Використовуючи перші шість рівнянь, ми $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ виразили через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ і підставили їх в інші рівняння. Після спрощення виразів, позбувшись рядів й інтегралів (що тепер є однаковими в правій та лівій частинах кожного рівняння), ми отримали нескінченну систему з $(12+n \cdot 3)$ лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, яку розв'язали методом редукції. У результаті були знайдені невідомі $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$. Далі, підставивши отримані значення $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ у вирази для $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, ми визначили всі невідомі задачі.

Чисельні дослідження напруженого стану

Чисельно задача розв'язана для шару з двома циліндричними трубами й однією циліндричною порожниною при заданому врівноваженому навантаженні (рис. 2).

Геометричні параметри: труби й циліндрична порожнина розташовані на одній горизонтальній осі ($\alpha_{12}=0$, $\alpha_{13}=0$), відстань між трубами $\ell_{12}=100$ мм, відстань до циліндричної порожнини $L_{13}=50$ мм, зовнішній радіус труб і циліндричної порожнини $R_1=R_2=R_3=15$ мм, внутрішній $r_1=r_2=10$ мм, відстані до верхньої та нижньої меж шару $h=\tilde{h}=25$ мм.



Фізичні характеристики шару: алюмінієвий сплав Д16Т, коефіцієнт Пуассона $\nu_0=0,3$, модуль пружності $E_0=7,1 \times 10^4$ МПа. Фізичні характеристики труб розраховувалися у двох варіантах: сталь ШХ15 (коефіцієнт Пуассона $\nu_1=\nu_2=0,28$, модуль пружності $E_1=E_2=2,16 \times 10^5$ МПа) і поліамід ($\nu_1=\nu_2=0,4$, модуль пружності $E_1=E_2=1,65 \times 10^3$ МПа). Напруження, для порівняння, також були отримані для шару із трьома циліндричними порожнинами (без втулок) [28].

Задані напруження:

– на верхній межі шару

$$\sigma_y^{(h)}(x, z) = \frac{F - 10^8}{(z^2 + 10^2)^2 \cdot ((x - \ell_{13})^2 + 10^2)^2}; \tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0; F = 1;$$

– на нижній межі шару

$$\sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z) = \frac{F - 10^8}{2(z^2 + 10^2)^2 \cdot (x^2 + 10^2)^2} + \frac{F - 10^8}{2(z^2 + 10^2)^2 \cdot ((x - \ell_{12})^2 + 10^2)^2}; \tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0.$$

Нульові напруження задані:

– на внутрішніх поверхнях труб $\sigma_\rho^{(p)}(\varphi_p, z) = \tau_{\rho\varphi}^{(p)} \cdot \vec{e}_\varphi = \tau_{\rho z}^{(p)} = 0, p=1, 2;$

– на поверхні порожнини $\sigma_\rho^{(3)} = \tau_{\rho\varphi}^{(3)} = \tau_{\rho z}^{(3)} = 0.$

Нескінченна система була зрізана по параметру $m=6$ (кількість членів ряду Фур'є і порядок системи рівнянь).

Точність виконання граничних умов при зазначених m і заданих геометричних параметрах становить не менше ніж 10^{-4} при значеннях від 0 до 1.

На рис. 3 представлені напруження σ_φ на внутрішніх і зовнішніх поверхнях труби $p=1$ при $z=0$. Напруження σ_φ на поверхні труби $p=2$ є дзеркальними.

Напруження σ_φ в середині втулок значно залежать від матеріалу цих втулок (рис. 3). Якщо втулки виготовлені з поліаміду, напруження σ_φ в них майже дорівнюють нулю.

При виконанні втулок зі сталі напруження σ_φ не дорівнюють нулю, а максимальні значення виникають на внутрішній поверхні цієї втулки (рис. 3, лінія 1).

Внутрішня й зовнішня поверхні втулок мають різні за знаком значення напружень σ_φ (рис. 3, лінії 1, 2). Це означає, що втулка (по товщині полки) працює на згин.

На рис. 4 представлені напруження σ_φ в середині шару на поверхнях циліндричних отворів при $z=0$.

Напруження σ_φ в середині шару на поверхні циліндричної порожнини $p=3$ (рис. 4, лінія 1) не залежать від матеріалу втулок: $\sigma_\varphi^{(\text{сталь})} = \sigma_\varphi^{(\text{поліамід})} = \sigma_\varphi^{(\text{порожнина})}$.

Напруження σ_φ на поверхні отвору $p=1$ залежать від матеріалу втулки. Якщо втулка виконана з поліаміду, то напруження σ_φ на поверхні отвору $p=1$ дорівнюють напруженням σ_φ без втулок (рис. 4, лінія 3). Якщо втулка виконана зі сталі, то напруження σ_φ на поверхні отвору $p=1$ (рис. 4, лінія 2) майже у два рази менші за напруження σ_φ з втулкою з поліаміду.

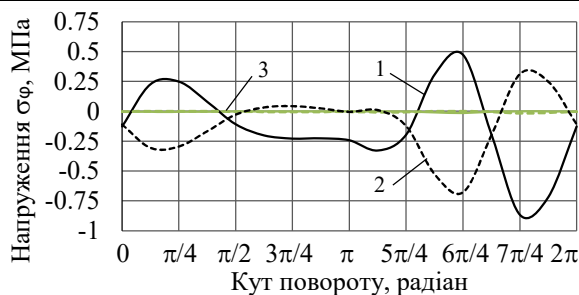


Рис. 3. Напруження σ_φ на поверхнях труб:

1 – труба (сталь), $\rho=r_1$; 2 – труба (сталь), $\rho=R_1$;
3 – труба (поліамід), $\rho=R_1$

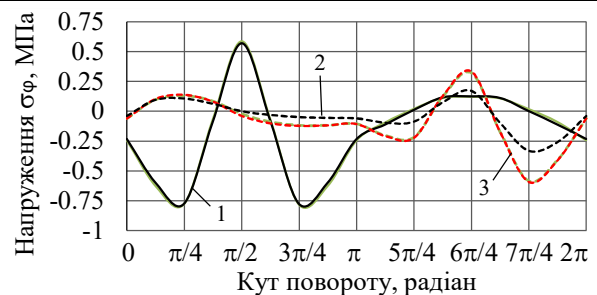


Рис. 4. Напруження σ_φ в середині шару на поверхнях отворів:

1 – порожнина $p=3$; 2 – отвір $p=1$, сталь;
3 – отвір $p=1$, поліамід

На рис. 5 представлені напруження σ_z в середині шару на поверхнях циліндричних отворів при $z=0$.

Напруження σ_z в середині шару на поверхні циліндричної порожнини $p=3$ (рис. 5, лінія 1) не залежать від матеріалу втулок: $\sigma_z^{(сталь)} = \sigma_z^{(поліамід)} = \sigma_z^{(порожнина)}$.

Якщо втулка виготовлена з поліаміду, то напруження σ_z на поверхні отвору $p=1$ (рис. 5, лінія 3) мало відрізняються від напруження σ_z без втулки (рис. 5, лінія 4) і більше ніж вдвічі перевищують напруження σ_z , якщо втулка виконана зі сталі (рис. 5, лінія 2).

На рис. 6 подані напруження σ_x на верхній та нижній поверхнях шару вздовж осі x при $z=0$.

Напруження σ_x вздовж осі x на верхній межі шару майже не залежать від матеріалу втулки або її відсутності (рис. 6, лінія 1). Максимальні значення на цій поверхні виникають над циліндричною порожниною ($p=3$) і перевищують задані нормальні напруження σ_y .

На нижній межі шару напруження σ_x вздовж осі x залежно від матеріалу втулок змінюються в області цих неоднорідностей (рис. 6, лінії 2, 3).

Напруження σ_x вздовж осі x на нижній межі шару, при відсутності втулок, дорівнюють напруженням σ_x , коли матеріал втулок поліамід (рис. 6, лінія 3).

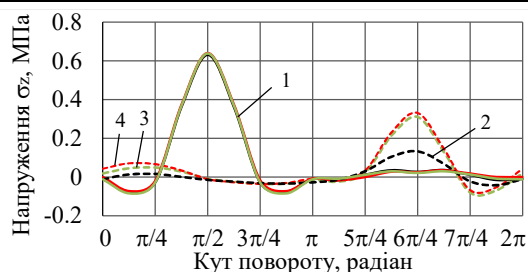


Рис. 5. Напруження σ_z в середині шару на поверхнях отворів:

1 – порожнина $p=3$; 2 – отвір $p=1$, сталь;
3 – отвір $p=1$, поліамід; 4 – отвір $p=1$, порожнина

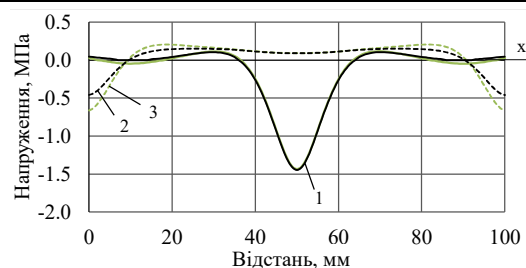


Рис. 6. Напруження σ_x на плоских поверхнях шару:

1 – на верхній межі ($y=h$);
2 – на нижній межі ($y=-\tilde{h}$), втулка зі сталі;
3 – на нижній межі ($y=-\tilde{h}$), втулка зі поліаміду

Висновки

1. Запропоновано аналітико-числовий підхід до розв'язання першої основної просторової задачі теорії пружності для шару, гладко контактуючого з двома поздовжніми циліндричними трубами й послабленого n циліндричними порожнинами.

2. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, що дало змогу застосувати метод редукції. Використання аналітико-числового узагальненого методу Фур'є забезпечило отримання розв'язку з необхідною точністю.

3. Чисельно визначений напружений стан шару з однією циліндричною порожниною і двома товстостінними трубами при збалансованому навантаженні.

4. Проведений порівняльний аналіз напруженого стану шару з варіантом, коли замість товстостінних труб розташовані порожнини [28].

5. Проведений чисельний аналіз напруженого стану шару й товстостінних труб при збалансованому навантаженні показав, що застосування:

– поліамідних втулок, у порівнянні з їх відсутністю, майже не впливає на напружено-деформований стан конструкції;

– сталених втулок зменшує напруження в середині шару в областях їх розташування, перерозподіляючи напруження на самі втулки.

Запропонований метод розв'язання дає можливість отримувати напружено-деформований стан конструкцій, що містять циліндричні порожнини і втулки.

Проведений чисельний аналіз дозволяє оцінити вплив матеріалу на величини розподілення напружень у конструкціях машин і механізмів на етапі проектування.

У подальшому розвитку означеної теми досліджень необхідно розглянути моделі з іншими граничними умовами. Одним із таких варіантів є врахування жорсткого з'єднання між шаром і трубами.

Література

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 891 с.
2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
4. Tekkaya A. E., Soyarslan C. Finite element method. In: Laperrière L., Reinhart G. (eds) CIRP Encyclopedia of Production Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699.
5. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation>.
6. Засовенко А. В., Фасоляк А. В. Математичне моделювання динаміки пружного півпростору з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою, при осесиметричних навантаженнях. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2023. № 2. С. 67–73. <https://doi.org/10.15588/1607-6885-2023-2-10>.
7. Моргун А. С., Франчук О. В. Метод граничних елементів в розрахунках кільцевих фундаментів. Вінниця: ВНТУ, 2016. 90 с.
8. Кушнір Р., П'янило Я., П'янило А. Особливості застосування числового методу скінчених різниць при моделюванні фізичних процесів. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2005. Вип. 2. С. 58–69.
9. Aitharaju V., Aashat S., Kia H., Satyanarayana A., Bogert P. Progressive damage modeling of notched composites. NASA Technical Reports Server. 2016. <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20160012242.pdf>.
10. Kondratiev A. V., Gaidachuk V. E., Kharchenko M. E. Relationships between the ultimate strengths of polymer composites in static bending, compression, and tension. *Mechanics of Composite Materials*. 2019. Vol. 55, no. 2. P. 259–266. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09808-x>.
11. Ugrimov S., Smetankina N., Kravchenko O., Yareschenko V. Analysis of Laminated Composites Subjected to Impact. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering – 2020. ICTM 2020. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2021. Vol. 188. P. 234–246. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66717-7_19.
12. Fesenko A., Vaysfel'd N. The wave field of a layer with a cylindrical cavity. In: Gdoutos, E. (eds) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Structural Integrity*. Cham: Springer, 2019. Vol. 8. P. 277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.
13. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 2021. Vol. 33. P. 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.
14. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2022. Vol. 304. Part 2. Article 116403. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.
15. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
16. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P. 148–158. <https://doi.org/10.1134/S1995423915020068>.
17. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. P. 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/S0021894416060237>.
18. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. P. 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.
19. Ukrainets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 2. No. 7 (110). P. 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.
20. Мірошніков В. Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 102. С. 77–90. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>.
21. Мірошніков В. Ю., Денисова Т. В., Проценко В. С. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 103. С. 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.
22. Miroshnikov V. Yu. Stress state of an elastic layer with a cylindrical cavity on a rigid foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 372–381. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x>.

23. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress strain state of the layer with a longitudinal cylindrical thick-walled tube and the displacements given at the boundaries of the layer. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 2. P. 44–52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>.
24. Miroshnikov V. Rotation of the layer with the cylindrical pipe around the rigid cylinder. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32.
25. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Demenko V. F. Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. No. 1. P. 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>.
26. Мірошніков В. Ю., Савін О. Б., Косенко М. Л., Ільїн О. О. Аналіз напруженого стану шару з двома циліндричними врізаними опорами та циліндричними втулками. *Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології*. 2024. № 101. С. 112–126. <https://doi.org/10.32620/oikit.2024.101.08>.
27. Denshchykov O. Yu., Pelykh V. P., Hrebenuk Ya. V., Miroshnikov V. Yu. First basic problem of elasticity theory for a composite layer with two thick-walled tubes. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2024. Vol. 27. No. 4. P. 40–50. <https://doi.org/10.15407/pmach2024.04.040>.
28. Мірошніков В. Ю., Олешкевич С. В., Медведєва А. В., Савін О. Б. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з трьома поздовжніми циліндричними порожнинами. *Науковий вісник будівництва*. 2021. Т. 103. № 1. С. 150–155. <https://doi.org/10.29295/2311-7257-2021-103-1-150-155>.
29. Мірошніков В. Ю. Розв'язок основних та деяких мішаних задач теорії пружності для багатошарового середовища з поздовжніми круговими циліндричними порожнинами та неоднорідностями: автореф. дис. д-ра техн. наук: 01.02.04; Нац. аерокосм. ун-т ім. М. С. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», Харків, 2020. 40 с.

Надійшла до редакції 08.04.2025