

УДК 539.3

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ І ВРІЗАНИМИ ОПОРАМИ З ВТУЛКАМИ

М. Л. Косенко

Scs2012kh@gmail.com

ORCID: 0009-0002-2005-2222

Національний
аерокосмічний
університет
«Харківський
авіаційний інститут»,
61070, Україна, м. Харків,
вул. Вадима Манька, 17

В авіакосмічній галузі й машинобудуванні поширеним є застосування циліндричних врізаних опор для деталей. Для розрахунку подібних з'єднань використовують спрощення або наближення. У статті запропоновано методику розрахунку шару на двох поздовжньо врізаних циліндричних опорах. Між опорами й шаром розташовані втулки (товстостінні труби), шар послаблений поздовжньою циліндричною порожниною. На нижній і верхній поверхнях шару задані напруження, а на внутрішніх поверхнях труб – умови гладкого контакту, на поверхні порожнини – напруження. Для розв'язання задачі використано рівняння Ламе, де для шару застосовано декартову систему координат, а для труб і циліндричної порожнини – локальні циліндричні системи. Поєднання базисних розв'язків у різних системах координат здійснюється за допомогою узагальненого методу Фур'є. Виходячи з граничних умов й умов спряження, отримано нескінченну систему інтегро-алгебраїчних рівнянь, яка зводиться до лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду й розв'язується за допомогою методу редукції. Напружено-деформований стан у кожній точці пружних з'єднаних тіл визначено також із рівняння Ламе з використанням узагальненого методу Фур'є до базисних розв'язків. Показано, що точність результатів у цьому випадку залежить від наближення граничних поверхонь одна до одної та від порядку системи рівнянь. Чисельні дослідження проведено для шару з опорами й порожниною, розташованими на одній прямій, при дії консольного навантаження. Аналіз напруженого стану отримано в зонах циліндричних отворів шару й в тілі втулок. Максимальні напруження перевищують задані і виникають у місці розташування циліндричної порожнини. Запропонований метод розв'язання дає можливість отримувати результати напружено-деформованого стану консольних елементів конструкцій літаків, оцінювати вплив матеріалу й геометричних параметрів на величини розподілення напружень в інших конструкціях машин і механізмів, які можуть бути представлені у вигляді моделей, подібних розглянутій.

Ключові слова: узагальнений метод Фур'є, рівняння Ламе, шар з циліндричними включеннями, нескінченна система інтегро-алгебраїчних рівнянь, циліндрична порожнина.

Вступ

У машино- та авіабудуванні поєднання різних елементів конструкцій часто відбувається шарнірно. Ці елементи з'єднуються болтами, заклепками, підшипниками та іншими кріпленнями, під які в конструкціях передбачаються відповідні отвори. Таким чином створюються елементи, опори яких являють собою врізані циліндри. Для посилення місця контакту з опорою в деталях часто встановлюються втулки, жорстко поєднані з деталлю й які гладко контактують з опорою.

Для розрахунку таких вузлів, що являють собою шар із товстостінними трубами, застосовуються переважно наближені методи, як-от метод скінчених елементів [1], і програмні засоби на його основі [2]. Проте за такого підходу для підтвердження отриманих результатів варто скористатися аналітичним або аналітико-числовими методами, або проводити випробування [3, 4].

Застосування аналітичних методів [5, 6], заснованих на розкладі розв'язків у ряд Фур'є, можливе лише при значному спрощенні розрахункової моделі. Вказані методи розглядають задачу або в плоскому вигляді, або з кількістю граничних умов менше трьох.

Аналітико-числові методи, в порівнянні з аналітичними, дають більше можливостей для оцінки напруженого стану шару з циліндричними неоднорідностями. Так, у роботах [7, 8] розглядається шар із циліндричною порожниною, розташованою перпендикулярно до меж шару. Розв'язок заснований на інтегральних перетвореннях Лапласа і скінчених синус- і косинус-рядів Фур'є, що послідовно застосовуються до осесиметричних рівнянь руху і граничних умов. Однак у разі використання запропонованого методу [7, 8] можна враховувати не більше однієї циліндричної порожнини.

У роботі [9] завдяки інтегральним перетворенням Вебера-Орра досліджується задача кручення пружного півпростору, що має вертикальну циліндричну порожнину, при цьому на плоскій границі закріплено коаксіальний штамп, що обертається під дією крутного моменту. Метод, запропонований в цьому дослідженні, може бути використаний тільки для півпростору.

Для досягнення оптимального розподілу теплових напружень у композитних пластинах із некруглими отворами, що знаходяться під рівномірним тепловим потоком, у роботі [10] застосовуються метаввристичні алгоритми оптимізації. Аналітична частина дослідження базується на термопружній теорії та методі комплексної змінної. Проте запропонований метод [10] не може враховувати більше ніж одну циліндричну порожнину.

Для розрахунку шару з декількома циліндричними неоднорідностями, розташованими паралельно межах шару, стане у нагоді підхід, заснований на аналітико-числовому узагальненому методі Фур'є [11], що дозволяє поєднати базисні розв'язки рівняння Ламе в різних системах координат. Так, за допомогою узагальненого методу Фур'є розв'язано задачі для циліндра з циліндричними порожнинами [12, 13] і включеннями [14]. У роботі [15] на прикладі задачі для півпростору з циліндричною порожниною наведено обґрунтування формул переходу базисних розв'язків між декартовою й циліндричною системами координат.

На основі узагальненого методу Фур'є в роботі [16] розв'язана задача для шару з однією позовжньою циліндричною порожниною, а [17] – задача для шару з суцільним циліндричним включенням. Задача для шару, поєданого з півпростором, в якому розташована циліндрична порожнина розв'язана в роботі [18]. Шар з двома циліндричними порожнинами (змодельовані врізані циліндричні опори) розглядається в роботі [19]. Задача для шару з однією товстостінною трубою розв'язана в роботі [20], для шару з однією товстостінною трубою та циліндричною порожниною – у [21], з двома товстостінними трубами (змодельовані циліндричні врізані опори з втулками) – у роботі [22]. Проте підходи, запропоновані в роботах [16–22], не можуть бути застосовані при розв'язку задачі для шару на двох циліндричних врізаних опорах із втулками, послабленого циліндричною порожниною.

Метою даної роботи є:

- розробити методику розв'язання змішаної задачі теорії пружності для шару з двома позовжніми циліндричними трубами й циліндричною порожниною. Задля її досягнення на верхній та нижній межах шару задані напруження, на внутрішніх поверхнях труб – умови гладкого контакту, а на порожнині – напруження;
- провести аналіз напруженого стану шару й товстостінних труб при заданому консольному навантаженні.

Постановка задачі

Модель являє собою шар із двома циліндричними товстостінними трубами й циліндричною порожниною, розташованими паралельно його межах (рис. 1).

Для опису геометрії труб і порожнини використовуються локальні циліндричні координати (ρ_p, φ_p, z) , де p – номер труби або порожнини), а для шару – декартова система координат (x, y, z) , яка співпадає з системою координат першої труби ($p=1$).

Зовнішні радіуси труб або порожнини позначено R_p , а внутрішні радіуси труб r_p . Відстань до меж шару $y=h$ та $y=-\tilde{h}$.

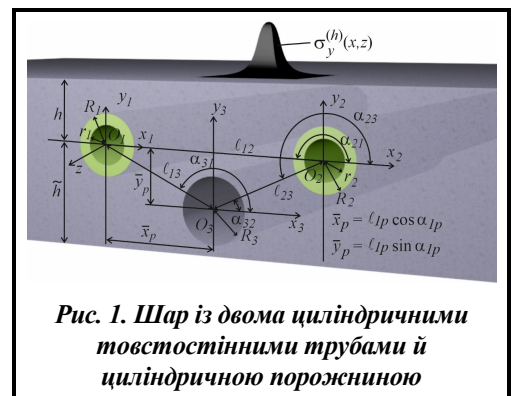


Рис. 1. Шар із двома циліндричними товстостінними трубами й циліндричною порожниною

Для розв'язання задачі шукаємо розв'язок рівнянь Ламе $\Delta \vec{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \text{div} \vec{u} = 0$, при заданих граничних умовах:

- на верхній та нижній межах шару задані напруження

$$F\vec{U}(x, z)_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z); \quad F\vec{U}(x, z)_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z)$$

де

$$\vec{F}_h^0(x, z) = \tau_{yx}^{(h)} \cdot \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \cdot \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \cdot \vec{e}_z; \quad \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \cdot \vec{e}_z; \quad (1)$$

– на внутрішніх поверхнях труб задані умови гладкого контакту

$$\left. \begin{aligned} U_\rho(\varphi_p, z) \Big|_{\rho_p=R_p} &= U_0^{(p)}(\varphi_p, z) \\ \tau_{\rho\varphi} \Big|_{\rho_p=R_p} &= \tau_1^{(p)}(\varphi_p, z) \\ \tau_{\rho z} \Big|_{\rho_p=R_p} &= \tau_2^{(p)}(\varphi_p, z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

– на поверхні циліндричної порожнини ($p=3$) задані напруження

$$F\vec{U}(\varphi_3, z) \Big|_{\rho_3=R_3} = \vec{F}_3^0(\varphi_3, z) = \sigma_\rho^{(3)} \vec{e}_\rho + \tau_{\rho\varphi}^{(3)} \vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z}^{(3)} \vec{e}_z, \quad (3)$$

де $\vec{U}$ – переміщення в шарі; $F\vec{U} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{div}} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}) \right]$ – оператор напруження.

Шар жорстко поєднаний з кожною трубою умовами спряження

$$\vec{U}_0(\varphi, z) \Big|_{\rho=R_p} = \vec{U}_p(\varphi, z) \Big|_{\rho=R_p}; \quad (4)$$

$$F\vec{U}_0(\varphi, z) \Big|_{\rho=R_p} = F\vec{U}_p(\varphi, z) \Big|_{\rho=R_p}, \quad (5)$$

де $\vec{U}_0(\varphi, z)$ – розв’язок для шару; $\vec{U}_p(\varphi, z)$ – розв’язок для труб.

Усі задані функції вважатимемо швидко спадаючими від початку координат по осі z і осі x .

Методика розв’язання

Розв’язання задачі представлено у вигляді, запропонованому в роботі [22], з урахуванням додаткової порожнини

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 &= \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) d\lambda; \\ \vec{U}_2 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_2, \varphi_2, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_2, \varphi_2, z; \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ – 27 невідомих функцій ($k=1..3$, $p=1..3$), які необхідно знайти з крайових умов (1)–(3) і умов спряження (4), (5); $\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$, $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв’язки рівняння Ламе, представлені у вигляді [11]

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm i\gamma y}; \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}; \quad \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right]; \quad k=1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (v-1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot);$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(v-1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2};$$

$$-\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де v – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Для запису рівнянь (6) і (7) в одній системі координат застосовані формули переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе [11]:

– від зовнішніх розв'язків для циліндра $\bar{S}_{k,m}$ до розв'язків для шару $\bar{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\bar{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3;$$

$$\bar{S}_{2,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \bar{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm 4\mu(1-\sigma)\bar{u}_3^{(\mp)} \right) \cdot \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2} \quad (8)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– від розв'язків шару $\bar{u}_k^{(+)}$ і $\bar{u}_k^{(-)}$ до внутрішніх розв'язків циліндру $\bar{R}_{k,m}$

$$\bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad k=1, 3;$$

$$\bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) = e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma)\bar{R}_{3,m} \right) \right], \quad (8)$$

де $\bar{R}_{k,m} = \bar{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi_p + \lambda z)}$; $\bar{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\bar{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_z \right)$;

$\bar{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_{\rho} \cdot [(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho)] + \bar{e}_{\varphi} i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda\rho I'_n(\lambda\rho)$;

$\bar{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \bar{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right]$; $\bar{e}_{\rho}$, $\bar{e}_{\varphi}$, $\bar{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

– від розв'язків для циліндра з номером p до розв'язків для циліндра з номером q

$$\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, \quad k=1, 2, 3;$$

$$\bar{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \quad \bar{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \bar{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\bar{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq}) \cdot \bar{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda\ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda\ell_{pq})] \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}, \quad (9)$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{pq} ; $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Для знаходження 27 невідомих функцій (6) і (7) сформована система з 27 інтегро-алгебраїчних рівнянь.

Перші шість рівнянь утворюються при виконанні граничних умов на плоских поверхнях шару (1). Для цього до функцій (6) застосовано оператор напружень, а до (1) – подвійний інтеграл Фур'є, після цього вони прирівняні один до одного. Базисні розв'язки $\bar{S}_{k,m}$ із циліндричної системи координат за допомогою формул переходу (8) переписані через $\bar{u}_k^{\pm}$ в декартову.

Ще шість рівнянь утворюються при виконанні граничних умов на внутрішніх поверхнях труб (2). Для цього до функцій (7) застосовано оператор напружень, а виокремлені вирази по $\bar{e}_{\varphi}$ й $\bar{e}_z$ в напруженнях по $\bar{e}_{\rho}$ залишаються в переміщеннях. Ці вирази прирівняні до функцій (2), до яких застосовано інтеграл Фур'є по осі z і ряд Фур'є по куту φ .

Три рівняння записані для граничних умов на поверхні порожнини. Для цього до функцій (6) застосовано оператор напружень, а до (3) – інтеграл Фур'є по осі z і ряд Фур'є по куту φ . Після цього вони прирівняні один до одного. Базисні розв'язки $\bar{u}_k^{\pm}$ з декартової системи координат за допомогою формул переходу (9) переписані через $\bar{R}_{k,m}$ в циліндричну.

Ще 12 рівнянь утворюються при виконанні умов спряження між шаром і кожною трубою (4), (5). При виконанні цих умов базисні розв'язки $\bar{u}_k^\pm$ переписані з декартової системи координат через $\bar{R}_{k,m}$ в локальні циліндричні за допомогою функцій переходу (9). Крім того, задіяні формули переходу базисних розв'язків від однієї локальної циліндричної системи координат до іншої (10).

Із перших шести рівнянь були виведені $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ і підставлені в інші рівняння. Звільнившись у лівій та правій частинах від рядів й інтегралів, отримали нескінченну систему з 21 лінійного алгебраїчного рівняння другого роду, до якої може бути застосований метод редукції. У результаті розв'язання знайдені невідомі $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(3)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(2)}(\lambda)$. Отримані значення функцій $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ та $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ підставлені у вираз для $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Завдяки цьому знайдені всі невідомі рівнянь (6) і (7).

Чисельні дослідження напруженого стану

Чисельно задача розв'язана для шару з двома циліндричними трубами й циліндричною порожниною при заданому консольному навантаженні (рис. 2).

Геометричні параметри моделі: труби й циліндрична порожнина розташовані на одній горизонтальній осі ($\alpha_{12}=0$, $\alpha_{13}=\pi$), відстань між трубами $L_{12}=40$ мм, відстань до циліндричної порожнини $L_{13}=40$ мм, зовнішній радіус труб $R_1=R_2=R_3=15$ мм, внутрішній $r_1=r_2=10$ мм, відстані до верхньої та нижньої меж шару $h=\tilde{h}=20$ мм.

Фізичні характеристики шару: алюмінієвий сплав Д16Т, коефіцієнт Пуассона $\nu_0=0,3$, модуль пружності $E_0=7,1 \times 10^4$ МПа. Фізичні характеристики труб: сталь ШХ15, коефіцієнт Пуассона $\nu_1=\nu_2=0,28$, модуль пружності $E_1=E_2=2,16 \times 10^5$ МПа.

На верхній межі шару задані напруження у вигляді одиничної хвилі $\sigma_y^{(h)}(x, z) = \frac{-10^8}{(z^2 + 10^2)^2 \cdot ((x+c)^2 + 10^2)^2}$, $c=160$ мм і нульові дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на нижній межі шару – нульові напруження $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$. На внутрішніх поверхнях труб задані нульові нормальні переміщення й дотичні напруження $U_0^{(p)}(\varphi_p, z) = \tau_1^{(p)}(\varphi_p, z) = \tau_2^{(p)}(\varphi_p, z) = 0$, $p=1 \dots 2$. На поверхні порожнини задані нульові напруження $\sigma_p^{(3)} = \tau_{\rho\varphi}^{(3)} = \tau_{\rho z}^{(3)} = 0$.

Точність виконання граничних умов залежить від кількості членів ряду Фур'є і порядку системи рівнянь – m . При заданих геометричних параметрах збіжність граничних умов представлена в табл. 1.

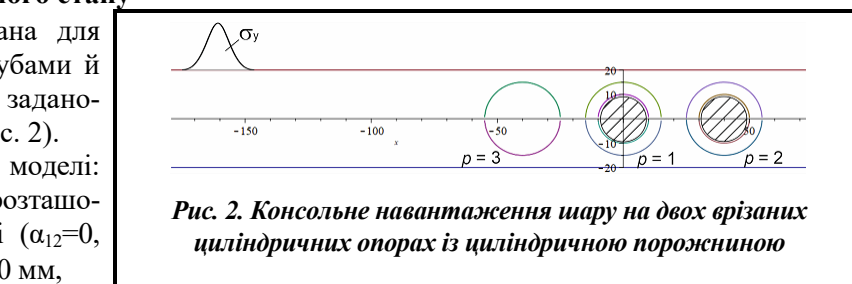


Рис. 2. Консольне навантаження шару на двох врізаних циліндричних опорах із циліндричною порожниною

Таблиця 1. Збіжність граничних умов

Напруження	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$\sigma_y^{(h)}(x, z)$	-0,98979	-0,996239	-0,999133	-0,99982	-0,999954
$\sigma_y^{(\tilde{h})}(x, z)$	-0,0026	-0,00025	-0,000013	-2×10^{-6}	-1×10^{-6}

Аналіз напруженого стану проведений при $m=6$.

На рис. 3 представлено напруження σ_p на внутрішніх і зовнішніх поверхнях труб при $z=0$.

Напруження σ_p є максимальними на внутрішніх поверхнях труб (рис. 3, лінії 3, 4) і виникають під впливом навантаження й нульових нормальних переміщень на опорах. Напруження σ_p на внутрішній поверхні труби $p=2$ (рис. 3, лінія 4) протилежне за знаком і дещо більше за напруження σ_p на трубі $p=1$ (рис. 3, лінія 3). Ці напруження також мають різний знак залежно від частини труби, де вони розглядаються (верхня або нижня). Напруження σ_p на внутрішніх поверхнях труб також більші на трубі $p=2$ (рис. 3, лінія 2).

Зовнішні поверхні труб жорстко поєднані з шаром, тому напруження σ_r на поверхні спряження в тілі шару дорівнює напруженню σ_r в тілі труби, тобто на поверхнях порожнин $p=1$ і $p=2$ в тілі шару виникають напруження, вказані на рис. 3 (лінії 1, 2).

На рис. 4 представлено напруження σ_ϕ на зовнішніх і внутрішніх поверхнях труб при $z=0$.

Напруження σ_ϕ в тілі труби $p=1$ (рис. 4, лінії 1, 2) є максимальними на зовнішній поверхні труби, значно перевищують напруження σ_ϕ в тілі труби $p=2$ і задані одиничні напруження σ_y .

Напруження σ_ϕ в тілі труби $p=2$ (рис. 4, лінії 3, 4) на зовнішній і внутрішній поверхнях труби майже не відрізняються і значно менші за напруження в тілі труби $p=1$.

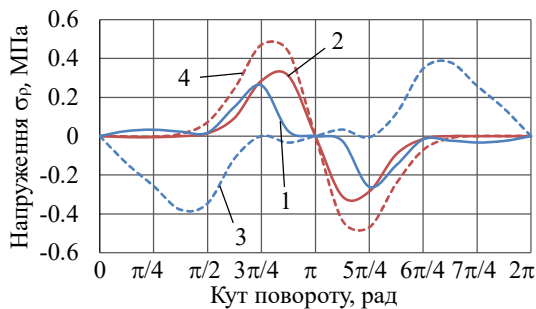


Рис. 3. Напруження σ_r на поверхнях труб:

- 1 – труба $p=1$, $\rho=R_1$; 2 – труба $p=1$, $\rho=r_1$;
3 – труба $p=2$, $\rho=R_2$; 4 – труба $p=2$, $\rho=r_2$

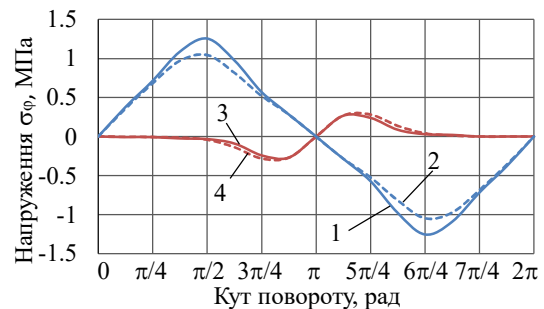


Рис. 4. Напруження σ_ϕ на поверхнях труб:

- 1 – труба $p=1$, $\rho=R_1$; 2 – труба $p=1$, $\rho=r_1$;
3 – труба $p=2$, $\rho=R_2$; 4 – труба $p=2$, $\rho=r_2$

На рис. 5 показано напруження σ_ϕ на поверхнях циліндричних отворів у тілі шару, у тому числі в місці контакту з трубами, при $z=0$.

Максимальні значення напруження $\sigma_\phi = \pm 1,7$ МПа спостерігаються на поверхні циліндричної порожнини $p=3$, в її верхній частині (рис. 5, лінія 3). Це значно перевищує задані одиничні напруження σ_y . Максимальні значення напружень σ_ϕ на поверхні спряження $p=1$ в тілі шару (лінія 1) $\sigma_\phi = \pm 0,4104$ МПа, на поверхні спряження $p=2$ в тілі шару дорівнює нулю. Суттєве зниження напружень на порожнинах $p=1$ і $p=2$ забезпечується, зокрема, і за рахунок сталених втулок.

Дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ на поверхнях циліндричних отворів шару в місці контакту з трубами (у тілі шару), при $z=0$ подано на рис. 6.

За умов жорсткого поєднання труб із шаром дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ на поверхні спряження в тілі труби дорівнюють напруженням $\tau_{r\phi}$ в тілі шару (рис. 6). Дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ в місці спряження шару з трубою $p=2$ зосереджені в лівій частині з'єднання (рис. 6, лінія 2).

Дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ в місці спряження шару з трубою $p=1$ (рис. 6, лінія 1) більші за напруження $\tau_{r\phi}$ в місці спряження шару з трубою $p=2$.

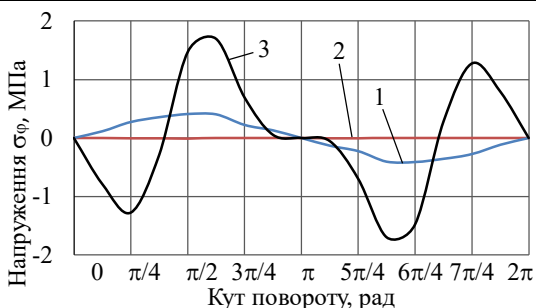


Рис. 5. Напруження σ_ϕ на поверхнях циліндричних отворів шару:

- 1 – у місці контакту з трубою ($p=1$);
2 – у місці контакту з трубою ($p=2$);
3 – на поверхні порожнини ($p=3$)

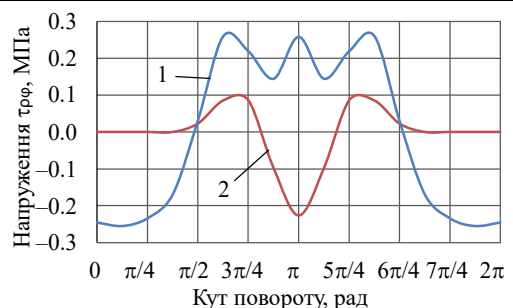


Рис. 6. Дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ в місцях спряження шару з трубами:

- 1 – опора $p=1$; 2 – опора $p=2$

На рис. 7 відображено напруження σ_x на верхній та нижній поверхнях шару вздовж осі x при $z=0$.

Напруження σ_x вздовж осі x на верхній межі шару є максимальними $\sigma_x = \pm 1,9648$ МПа на відстані $x = -30$ мм, тобто над порожниною ($p=3$), і значно перевищують задані одиничні напруження σ_y . На відстані $x = -160$ мм (у місці заданого одиничного напруження σ_y) напруження σ_x на верхній межі також мають екстремум $\sigma_x = -0,9596$ МПа.

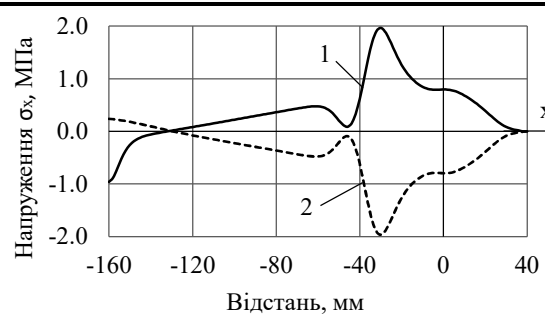


Рис. 7. Напруження σ_x на плоских поверхнях шару: 1 – на верхній межі ($y=h$); 2 – на нижній межі ($y=-h$)

Висновки

Запропоновано аналітико-числовий підхід до розв'язання змішаної задачі теорії пружності для шару з двома поздовжніми циліндричними трубами й циліндричною порожниною для випадку, коли на верхній та нижній межах шару задані напруження, на внутрішніх поверхнях труб – умови гладкого контакту, на порожнині – напруження.

Вперше в аналітичному вигляді записано розв'язок для шару з двома циліндричними трубами й циліндричною порожниною.

Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що допускає застосування до неї методу редукції. Застосування аналітико-числового узагальненого методу Фур'є дозволило отримати розв'язок задачі із заданою точністю.

Проведений чисельний аналіз напруженого стану шару й товстостінних труб при заданому консольному навантаженні показав, що:

- напруження σ_ϕ і σ_x у спряженні $p=1$ на поверхні порожнини $p=3$ й на плоских поверхнях шару значно перевищують задані одиничні σ_y ;

- при порівнянні напружень у місцях циліндричних опор напруження σ_ϕ і $\tau_{\phi\phi}$ за абсолютними значеннями більше на поверхнях труби $p=1$, а напруження σ_r більше на поверхнях труби $p=2$.

Запропонований метод розв'язання дає змогу отримувати результати напружено-деформованого стану консольних елементів конструкцій літаків, оцінювати вплив матеріалу й геометричних параметрів на величини розподілення напружень в інших конструкціях машин і механізмів, які можуть бути представлені у вигляді моделей, подібних розглянутій.

У подальшому для розвитку означеної теми досліджень необхідно розглянути моделі з іншими граничними умовами. Одним із таких варіантів є врахування гладких контактів між шаром і трубами.

Література

1. Tekkaya A. E., Soyarslan C. Finite element method. In: Laperrière L., Reinhart G. (eds) CIRP Encyclopedia of Production Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699.
2. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation>.
3. Рево С. Л., Авраменко Т. Г., Мельниченко М. М., Іваненко К. О. Фізико-механічні характеристики нанокомпозиційних матеріалів на основі фторопласту. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. 2021. № 3. С. 107–110. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.20>.
4. Kondratiev A. V., Gaidachuk V. E., Kharchenko M. E. Relationships between the ultimate strengths of polymer composites in static bending, compression, and tension. *Mechanics of Composite Materials*. 2019. Vol. 55. Iss. 2, P. 259–266. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09808-x>.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

7. Fesenko A., Vaysfel'd N. The wave field of a layer with a cylindrical cavity. In: Gdoutos, E. (eds) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Structural Integrity*. Cham: Springer, 2019. Vol. 8. P. 277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.
8. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 2021. Vol. 33. P. 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.
9. Malits P. Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021. Vol. 89. Article 104308. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308>.
10. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2022. Vol. 304. Part 2. Article 116403. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.
11. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
12. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8. P. 148–158. <https://doi.org/10.1134/S1995423915020068>.
13. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. P. 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/S0021894416060237>.
14. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the stress state of a unidirectional composite with cylindrical fibers forming a tetragonal structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. P. 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.
15. Ukrainets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 2. No. 7 (110). P. 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.
16. Мірошніков В. Ю., Денисова Т. В., Проценко В. С. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 103. С. 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.
17. Miroshnikov V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 413–420. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.413>.
18. Miroshnikov V. Yu. Investigation of the stress state of a composite in the form of a layer and a half space with a longitudinal cylindrical cavity at stresses given on boundary surfaces. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2019. Vol. 22. No. 4. P. 24–31. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.04.024>.
19. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Hrebennikov M. M., Demenko V. F. Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26. No. 1. P. 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>.
20. Miroshnikov V. Rotation of the layer with the cylindrical pipe around the rigid cylinder. In: Altenbach H., et al. *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2023. P. 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32.
21. Косенко М. Розв'язок задачі теорії пружності для шару з циліндричними врізаними опорами у вигляді порожнини та труби: жорстке закріплення. *Сучасні проблеми розвитку аерокосмічної галузі України: інженерія, бізнес, право: тези міждисциплінарної науково-практичної конференції (5 листопада 2024, м. Харків, Україна)*. Харків: Нац. аерокос. ун-т «ХАІ», 2024. С. 170–174.
22. Мірошніков В. Ю., Савін О. Б., Косенко М. Л., Ільїн О. О. Аналіз напруженого стану шару з двома циліндричними врізаними опорами та циліндричними втулками. *Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології*. 2024. № 101. С. 112–126. <https://doi.org/10.32620/oikit.2024.101.08>.

Надійшла до редакції 07.09.2025