

УДК 517.9:519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗГИНУ ІЗОТРОПНИХ ТА АНІЗОТРОПНИХ ПЛИТ З ЕЛІПТИЧНИМИ ТА ЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

¹ А. О. Кошкінandrii.koshkin@nure.ua,

ORCID: 0009-0005-0970-0403

^{1,2} О. О. Стрельнікова,

д-р техн. наук

elena15@gmx.com,

ORCID: 0000-0003-0707-7214

¹ Харківський національний
університет радіоелектроніки,
61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 14² Інститут енергетичних машин і
систем ім. А. М. Підгорного
НАН України,
61046, Україна, м. Харків,
вул. Комунальників, 2/10

Розв'язано задачу теорії згину тонких плит для нескінченної анізотропної плити з еліптичним або лінійним пружним включенням, вставленим в отвір без попереднього натягу й з умовами ідеального механічного контакту з плитою-матрицею. Для отримання розв'язку використано апарат узагальнених комплексних потенціалів, розклади функцій у ряди Лорана й за многочленами Фабера, а також метод конформних відображень для переходу від зовнішності одиничного кола до зовнішності еліпса. У роботі наведено точне аналітичне розв'язання задачі для випадку еліптичного включення й отримано вирази для згинальних моментів і поперечних сил як у плиті-матриці, так і у включенні. Для випадку, коли еліптичне включення вироджується у лінійне, виведено формули для обчислення коефіцієнтів інтенсивності моментів (KIM) у його кінцях. Запропонований підхід дозволяє коректно описати сингулярну поведінку згинальних моментів й оцінити умови, за яких KIM мають істотні значення. Проведено числові дослідження для плит з ізотропного (КАСТ-В) й анізотропного (склопластик косокутного намотування) матеріалів за різних значень відносної жорсткості включення і співвідношення його півосей. Встановлено, що зменшення жорсткості включення призводить до зростання згинальних моментів у певних зонах контакту з плитою, причому концентрація моментів в анізотропних плитах вища, ніж в ізотропних. Показано, що для лінійного включення великі значення KIM спостерігаються лише у випадках суттєво жорстких або м'яких включень; при близьких жорсткостях плити і включення (менш ніж у декілька разів) KIM майже зникають, а отже, вести мову про сингулярності моментів у таких випадках некоректно. Ізотропні плити розглянуто як окремий випадок анізотропних, що дозволяє поширити отримані результати на великий клас технічних задач механіки композитів і конструкцій із вставними елементами.

Ключові слова: тонка плита, згин, математичне моделювання, числові методи, отвори, включення, комплексні потенціали.

Вступ

Незважаючи на значні успіхи у розвитку прикладної теорії згину тонких анізотропних плит [1, 2, 3], на сьогодні задач для плит з інеродними включеннями розв'язано небагато. Особливо це стосується випадків з лінійними включеннями, коли необхідно дослідити сингулярну поведінку основних характеристик у їхніх кінцях. Для багатозв'язних плит така постановка й досі є складною математичною проблемою, тоді як для плити з одним включенням вдається отримати точний розв'язок, розглядаючи лінійне включення як граничний випадок еліптичного, коли одна з півосей дорівнює нулю. У роботі виконано математичне моделювання процесу згину анізотропної плити з пружним включенням. Наведено розв'язок задачі згину анізотропної плити з еліптичним, зокрема й лінійним, пружним включенням, отриманий завдяки застосуванню методів конформних відображень, розклад функцій у ряди Лорана й за многочленами Фабера, а також формулу для обчислення коефіцієнтів інтенсивності моментів (KIM). Представлено результати числових розрахунків, які дозволили виявити вплив жорсткості пружного включення, відношення півосей включення й анізотропії матеріалів плити й включення на значення згинальних моментів, що виникають у плиті.

Постановка та метод розв'язання задачі

Розглянемо нескінченну анізотропну плиту-матрицю з еліптичним отвором L_1 з центром у початку системи координат Ox_1y_1 й напівосями a_1, b_1 , розташованими уздовж осей координат (рис. 1). В отвір вставлено пружне включення з іншого матеріалу. Плита і включення знаходяться в умовах

ідеального механічного контакту. На плиту-матрицю діють згинальні моменти постійної величини M_x^∞ , M_y^∞ , H_{xy}^∞ на нескінченності.

Для розв'язання задачі використаємо комплексні потенціали Лехницького теорії згину анізотропних плит [1, 2]. Область, яку займає плита-матриця, позначимо S , а область пружного включення – S^1 .



Рис. 1. Нескінченна плита з еліптичним включенням

При використанні комплексних потенціалів розв'язання задачі зводиться до знаходження похідних функцій узагальнених комплексних змінних $W'_k(z_k)$ для плити-матриці й $W_k^1(z_k^1)$ для включення із відповідних граничних умов.

Похідні комплексних потенціалів для плити-матриці $W'_k(z_k)$ є функціями узагальнених комплексних змінних

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1)$$

де μ_k – корні характеристичного рівняння [4]

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (2)$$

$D_{ij} = B_{ij}D_0$ – параметри жорсткості матеріалу, для яких

$$B_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, B_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta, B_{16} = (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta;$$

$$B_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta, B_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, B_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix},$$

де a_{ij} – коефіцієнти деформації для матеріалу плити; $D_0 = 2h^3/3$; h – напівтовщина плити.

Функції $W'_k(z_k)$ визначені в областях S_k , які отримуються з області S афінними перетвореннями (1) і мають наступний вигляд [2]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (3)$$

де Γ_k – постійні, що знаходяться з системи рівнянь

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k = A_{11}M_x^\infty + A_{21}M_y^\infty + A_{31}H_{xy}^\infty, 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k = A_{12}M_x^\infty + A_{22}M_y^\infty + A_{32}H_{xy}^\infty;$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k = A_{13}M_x^\infty + A_{23}M_y^\infty + A_{33}H_{xy}^\infty, 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0;$$

$$A_{11} = (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2)/\Delta_1; \quad A_{21} = (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1; \quad A_{31} = (2D_{12}D_{26} - 2D_{12}D_{22})/\Delta_1;$$

$$A_{12} = (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})/\Delta_1; \quad A_{22} = (D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26})/\Delta_1; \quad A_{32} = (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)/\Delta_1;$$

$$A_{13} = (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1; \quad A_{23} = (2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2)/\Delta_1; \quad A_{33} = (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26})/\Delta_1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix}; \quad A_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}/D_{11},$$

де a_{k1n} – невідомі; ζ_{k1} – змінні, які визначаються з конформного відображення зовнішності одиничного кола $|\zeta_{k1}| \geq 1$ на зовнішності еліпсів L_{k1} :

$$z_k = R_{k1} \left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}} \right),$$

де

$$R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}; \quad m_{kl} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{2R_{k1}}. \quad (4)$$

Якщо функції $W'_k(z_k)$ визначені, то згинальні моменти й поперечні сили у всіх точках плити обчислюються за наступними формулами:

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2Re \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k); \quad (N_x, N_y) = -2Re \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W''_k(z_k)$$

в яких

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2; \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2; \\ r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2; \quad s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3.$$

Для згинальних моментів на довільній площадці з нормаллю n маємо

$$M_n = M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \sin nx \cos nx.$$

Похідні комплексних потенціалів для включення $W'_k(z_k^1)$ також є функціями узагальнених комплексних змінних

$$z_k^1 = x + \mu_k^1 y, \quad (5)$$

де μ_k^1 – корні характеристичного рівняння виду (2), в якому коефіцієнти D_{ij} замінені на відповідні параметри жорсткості D_{ij}^1 для включення. Ці функції визначені в областях S_k^1 , що отримуються з області S^1 афінними перетвореннями (5). Вони в цих скінченних однозв'язних областях голоморфнимі можуть бути розвинені в ряди за поліномами Фабера, які після перетворень можна записати у вигляді степеневих рядів наступним чином:

$$W'_k(z_k^1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^1 \left(\frac{z_k^1}{R_k^1} \right)^n. \quad (6)$$

Тут a_{kn}^1 – невідомі; R_k^1 – постійні, які обчислюються за аналогією з формулами (4).

Знайдемо невідомі a_{kin} та a_{kn}^1 з граничних умов на контурі контакту включення з матрицею-плитою [1, 2]

$$2Re \sum_{k=1}^2 (g_{k1l} W'_k(z_k) - g_{ki}^1 W'_k(z_k^1)) = 0, \quad (7)$$

де $g_{k11} = 1$; $g_{k1}^1 = 1$; $gg_{k12} = \mu_k, g_{k2}^1 \mu_k^1$; $g_{k13} = p_k/\mu_k$; $g_{k3}^1 = p_k^1/\mu_k^1$; $g_{k14} = q_k$; $g_{k4}^1 = q_k^1$.

Підставимо функції (3) та (6) в граничні умови (7) і використаємо метод рядів. Враховуючи те, що на контурі включення $\zeta_{k1} = \sigma$, отримаємо $a_{k1n} = a_{kn}^1 = 0$ при $n \geq 2$, а для визначення a_{k11} і a_{k1}^1 маємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^2 (a_{k11} - m_k^1 a_{k1}^1 - \bar{a}_{k1}^1) = -\sum_{k=1}^2 [R_{k1} m_{k1} + \bar{R}_{k1}]; \quad \sum_{k=1}^2 (\mu_k a_{k11} - \mu_k^1 m_k^1 a_{k1}^1 - \bar{\mu}_k^1 \bar{a}_{k1}^1) = -\sum_{k=1}^2 [\mu_k R_{k1} m_{k1} + \bar{\mu}_k \bar{R}_{k1}]; \\ \sum_{k=1}^2 \left(\frac{p_k}{\mu_k} a_{k11} - \frac{p_k^1}{\mu_k^1} m_k^1 a_{k1}^1 - \frac{\bar{p}_k^1}{\bar{\mu}_k^1} \bar{a}_{k1}^1 \right) = -\sum_{k=1}^2 \left[\frac{p_k}{\mu_k} R_{k1} m_{k1} + \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{R}_{k1} \right]; \\ \sum_{k=1}^2 (q_k a_{k11} - q_k^1 m_k^1 a_{k1}^1 - \bar{q}_k^1 \bar{a}_{k1}^1) = -\sum_{k=1}^2 [q_k R_{k1} m_{k1} + \bar{q}_k \bar{R}_{k1}].$$

Таким чином, похідні комплексних потенціалів мають вид

$$W'_k(z_k) = {}_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}, W'_k(z_k) = a_{k1}^1 \frac{z_k^1}{R_k^1},$$

а для моментів отримаємо наступні вирази

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2Re \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \left({}_k - \frac{a_{k11}}{R_{k1}(\zeta_{k1}^2 - m_{k1})} \right), (M_x^1, M_y^1, H_{xy}^1) = -2Re \sum_{k=1}^2 (p_k^1, q_k^1, r_k^1) \frac{a_{k1}^1}{R_k^1}.$$

Якщо отвір переходить у прямолінійний розріз, а включення – у пружну лінію відповідно, то можна також обчислювати КІМ k_{m1} (для моментів M_y) і k_{m2} (для моментів H_{xy}). Аналогічно випадку плоскої задачі [5] для КІМ отримаємо вирази

$$(k_{m1}, k_{m2}) = \frac{1}{\sqrt{a_1}} 2Re \sum_{k=1}^2 (q_k, r_k) a_{k11}.$$

На основі КІМ завдяки виразам [1]

$$\sigma_y = \frac{3M_y}{2h^3} z; \quad \tau_{xy} = \frac{3H_{xy}}{2h^3} z$$

можна знайти максимальні значення КІМ (при $z=h$)

$$(k_1, k_2) = \frac{3}{2h^2} (k_{m1}, k_{m2}).$$

Числові дослідження

Проведено числові дослідження згинальних моментів для ізотропного матеріалу КАСТ-В (матеріал М1) й анізотропного склопластика косокутного намотування (матеріал М2). Їх коефіцієнти деформації наведено у табл. 1. Коефіцієнти деформації для матеріалу включення обиралися наступним чином: $a_{ij}^{(l)} = \lambda^{(l)} a_{ij}$, де $\lambda^{(l)}$ – параметр відносної жорсткості.

Таблиця 1. Постійні матеріалів

Матеріал	$a_{11} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{22} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{12} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{66} \times 10^{-4}$, МПа ⁻¹
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500
М2	10000	2,800	-0,770	27,000

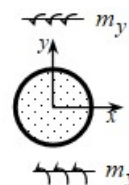


Рис. 2. Нескінченна плита з круговим включенням

Для плити з круговим включенням радіуса a_1 ($b_1=a_1$) (рис. 2) під впливом згинальних моментів $M_y^\infty = m_y$ для різних значень параметра відносної жорсткості $\lambda^{(l)}$ з точністю до постійного множника m_y у табл. 2 наведено значення моментів M_s у точках контакту плити з включенням на площадках, перпендикулярних контуру включення. Тут θ – центральний кут отвору, який відрховується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки. Значення $\lambda^{(l)}$, які дорівнюють 0 та ∞ , відповідають випадкам плити з абсолютно жорстким й абсолютно м'яким включенням (отвором).

Аналізуючи дані табл. 2, можна побачити, що зі зменшенням жорсткості включення (тобто зі збільшенням $\lambda^{(l)}$) значення моментів M_s у точках біля $\theta=0$ зростають, у точках поблизу $\theta=\pi/2$ вони спочатку спадають (при $\lambda^{(l)} > 1$), потім зростають (при $\lambda^{(l)} < 1$). При $\lambda^{(l)} < 10^{-2}$ включення можна вважати абсолютно жорстким, при $\lambda^{(l)} > 10^2$ – абсолютно м'яким (отвором). Концентрація моментів в анізотропній плиті вища, ніж в ізотропній.

У табл. 3 для різних відношень напівосей b_1/a_1 еліптичного включення й параметра відносної жорсткості $\lambda^{(l)}$ наведено значення моментів у точках плити поблизу включення, а також КІМ (при $b_1/a_1=10^{-5}$).

Із табл. 3 видно, що зі зменшенням відношення b_1/a_1 значення моментів M_s поблизу кінців більшої напівосі стрімко зростають по модулю; при $b_1/a_1 < 10^{-3}$ включення можна вважати лінійним і обчислювати для нього КІМ. При цьому КІМ виникає, якщо відносна жорсткість матеріалу включення велика або мала.

Таблиця 2. Значення моментів M_x у точках контакту плити

Матеріал	$\lambda^{(1)}$	θ , рад						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
M1	0	-0,164	-0,128	-0,029	0,107	0,242	0,341	0,377
	10^{-2}	-0,124	-0,092	-0,005	0,114	0,235	0,319	0,351
	10^{-1}	0,159	0,161	0,166	0,172	0,178	0,183	0,184
	0,5	0,720	0,671	0,539	0,359	0,179	0,046	-0,002
	2	1,248	1,169	0,951	0,653	0,355	0,137	0,058
	10	1,590	1,497	1,245	0,899	0,554	0,301	0,209
	10^2	1,704	1,608	1,346	0,989	0,631	0,370	0,274
	∞	1,718	1,622	1,359	1,000	0,641	0,378	0,283
M2	0	-0,222	-0,254	0,007	0,464	0,511	0,303	0,190
	10^{-2}	-0,185	-0,215	0,034	0,463	0,496	0,288	0,176
	10^{-1}	0,078	0,056	0,215	0,461	0,403	0,192	0,090
	0,5	0,653	0,616	0,568	0,476	0,275	0,074	-0,006
	2	1,369	1,257	0,925	0,534	0,256	0,098	0,046
	10	2,032	1,820	1,212	0,608	0,312	0,208	0,184
	10^2	2,311	2,053	1,328	0,641	0,344	0,266	0,253
	∞	2,348	2,084	1,343	0,646	0,349	0,274	0,263

Таблиця 3. Значення моментів і КІМ залежно від $\lambda^{(1)}$ та b_1/a_1

$\lambda^{(1)}$	b_1/a_1						KIM $k_{m1}^{\pm}$
	1	0,5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	
M1							
0	-0,16	-0,19	-0,42	-3,02	-29,00	-288,69	-0,136
10^{-2}	-0,12	-0,16	-0,33	-0,97	-1,32	-1,38	-0,001
0,5	0,72	0,63	0,53	0,50	0,49	0,49	0,000
2	1,25	1,40	1,77	1,97	1,99	1,99	0,000
10^2	1,70	2,40	7,62	42,10	86,81	97,28	0,013
∞	1,72	2,44	8,18	72,78	718,83	7178,87	1,000
M2							
0	-0,22	-0,27	-0,69	-5,37	-52,18	-520,13	-0,170
10^{-2}	-0,19	-0,24	-0,53	-1,51	-1,99	-2,06	-0,001
0,5	0,65	0,58	0,51	0,49	0,49	0,49	0,000
2	1,37	1,55	1,86	1,97	1,99	1,99	0,000
10^2	2,31	3,59	12,71	57,10	91,35	97,22	0,007
∞	2,35	3,70	14,48	135,77	1348,63	13475,67	1,000

На рис. 3 зображено графіки КІМ ($k_{m1}^{\pm}$) залежно від жорсткості включення (параметра $\lambda^{(1)}$). Бачимо, що для лінійного пружного включення вплив параметра $\lambda^{(1)}$ такий самий, як і для пружного кругового ядра: при $\lambda^{(1)} < 10^{-3}$ включення можна вважати абсолютно жорстким, а при $\lambda^{(1)} > 10^3$ – абсолютно м'яким (тріщиною). При $10^{-4} < \lambda^{(1)} < 10^4$ значення КІМ досить малі та ними можна знехтувати. Тому КІМ для лінійних пружних включень можна розглядати тільки в тому випадку, якщо жорсткість включення відрізняється від жорсткості плити не менше ніж у 10^3 разів.

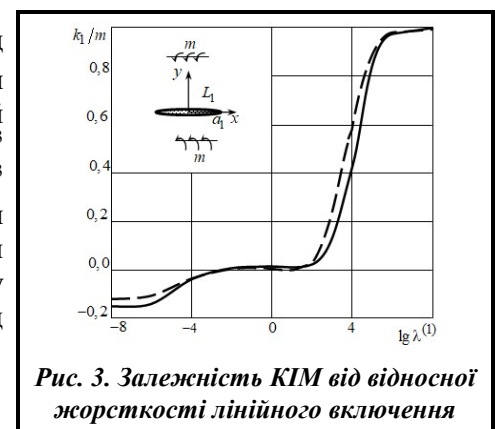


Рис. 3. Залежність КІМ від відносної жорсткості лінійного включення

Висновки

За допомогою комплексних потенціалів розв'язано задачу згину нескінченної анізотропної плити з еліптичним пружним включенням. Запропоновано підхід для обчислення коефіцієнтів інтенсивності моментів КІМ.

Проведене математичне моделювання процесу згину дозволило оцінити вплив відносної жорсткості включення на величину згинальних моментів у точках контакту плити з включенням, а також з'ясувати, у яких випадках можна вважати включення абсолютно м'яким і абсолютно жорстким.

Досліджено вплив відношення напівосей еліптичного включення на величину згинальних моментів і на КІМ. Встановлено, що включення можна вважати лінійним при $b_1/a_1 < 10^{-3}$. Виявлено, що КІМ можна розглядати у випадках, коли матеріал включення відрізняється від матеріалу плити не менше ніж у 10^3 разів.

Література

1. Lekhnitskii S. G., Tsai S. W., Cheron T. Anisotropic Plates. New York: Gordon and Breach, 1968. 534 p.
2. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит. *Теоретическая и прикладная механика*. 2012. № 4 (50). С. 113–132.
3. Максимович О. В., Соляр Т. Я., Кемпа Я. (2018). Дослідження згину анізотропних пластин із включеннями на основі сингулярних інтегральних рівнянь. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2018. Т. 61. № 3. С. 111–121.
4. Hsieh M. C., Hwu Ch. B. Anisotropic elastic plates with holes/cracks/inclusions subjected to out-of-plane bending moments. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. Iss. 19. P. 4905–4925. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00335-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00335-9).
5. Stashchuk M., Hembara N., Kovalchuk V. Microcrack under internal pressure at dislocation defect. *Procedia Structural Integrity*. 2019. Vol. 16. P. 252–259. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.07.049>.

Надійшла до редакції 15.10.2025