

УДК 539.3+519.60

## МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ ДЕМПФУВАННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В СФЕРИЧНИХ РЕЗЕРВУАРАХ

**В. І. Гнітько**, канд. техн. наук  
[gmitkovi@gmail.com](mailto:gmitkovi@gmail.com),  
ORCID: 0000-0003-2475-5486

**К. Г. Дегтярьов**,  
канд. техн. наук  
[kdegt89@gmail.com](mailto:kdegt89@gmail.com),  
ORCID: 0000-0002-4486-2468

**А. С. Колодяжний**  
[Task7@ukr.net](mailto:Task7@ukr.net),  
ORCID: 0009-0008-4026-6715

**Д. В. Крютченко**,  
доктор філософії  
[wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com),  
ORCID: 0000-0002-6804-6991

Інститут енергетичних машин і  
систем ім. А. М. Підгорного  
НАН України,  
61046, Україна, м. Харків,  
вул. Комунальників, 2/10

*Сферичні резервуари, частково заповнені рідиною, є важливими елементами сучасної техніки. Вони широко використовуються як ємності для зберігання питної води, небезпечних рідин, а також як частини паливних баків ракет-носіїв. Експериментальні випробування таких резервуарів на міцність і стійкість руху, як правило, є дороговартісними й не завжди безпечними. Це зумовлює необхідність розроблення методів віртуальних випробувань, заснованих на ефективних комп'ютерних алгоритмах. У зв'язку з цим актуальною є задача створення нових числових методів для аналізу коливань і стійкості руху рідини в резервуарах, у яких радіус вільної поверхні залежить від рівня заповнення. Виходячи з цього, мета дослідження полягає в розробленні числових методів аналізу стійкості руху у сферичних резервуарах за наявності горизонтальної перегородки. У роботі застосовано методи теорії потенціалу, граничних елементів, заданих нормальних форм, а також числові методи розв'язання систем диференціальних рівнянь. Розв'язано спектральні крайові задачі для визначення власних частот і форм коливань рідини у сферичних резервуарах без перегородок і з горизонтальними перегородками, що мають отвори різного діаметра. Ці задачі зведено до систем одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Отримані власні форми коливань використано як базисні функції для розв'язання задачі про вимушені коливання рідини у сферичних резервуарах під дією одночасних вертикальних і горизонтальних збуджень. Отримано вирази для потенціалу швидкостей та функції підйому вільної поверхні у формі рядів. Проведено аналіз збіжності цих рядів. Задачу визначення динамічних характеристик рідини зведено до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь типу Мат'є, що дало змогу дослідити стійкість руху рідини у сферичному резервуарі при комбінованих горизонтальних і вертикальних навантаженнях. У роботі розроблено й застосовано ефективний числовий підхід до дослідження коливань і стійкості руху рідини у сферичних резервуарах, частково заповнених рідиною. Запропонований підхід може бути використаний для віртуальних випробувань сферичних резервуарів й аналізу поведінки рідини при проектуванні й експлуатації резервуарів і паливних баків аерокосмічної техніки.*

**Ключові слова:** коливання рідини, демпфування, сферичні резервуари, сингулярні інтегральні рівняння, горизонтальні перегородки, метод граничних елементів, стійкість руху рідини.

### Вступ

Оболонкові системи й резервуари оболонкового типу, що мають відсіки, заповнені рідиною, широко використовуються в різних галузях сучасної промисловості, зокрема, в аерокосмічній техніці, енергетиці, нафтогазовій сфері й на транспорті. До таких об'єктів належать, наприклад, паливні баки ракет-носіїв, літаків і космічних апаратів, морських суден, а також наземні ємності для зберігання води, нафтопродуктів, зріджених газів та інших рідин. У процесі експлуатації подібні резервуари, які можуть містити небезпечні або агресивні середовища, нерідко зазнають серйозних навантажень, у тому числі сейсмічних. Якщо резервуар заповнений лише частково, під дією інтенсивних збурень виникає явище плескання рідини – низькочастотні коливання її вільної поверхні. Унаслідок цього на стінки резервуара можуть діяти значні локальні гідродинамічні тиски, здатні призвести до втрати стійкості конструкції, відхилення траєкторії руху космічних апаратів або навіть до масштабних екологічних наслідків у випадку руйнування резервуарів під час землетрусів або терористичних актів. Особливо небезпечними такі коливання стають на завершальних стадіях експлуатації, коли рівень рідини знижується, і у резервуарі залишається суттєвий вільний об'єм, що сприяє розвитку інтенсивних плескань. Для зменшення амплітуди цих коливань застосовують різноманітні конструктивні засоби, зокрема, внутрішні перегородки і

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.  
© В. І. Гнітько, К. Г. Дегтярьов, А. С. Колодяжний, Д. В. Крютченко, 2026

спеціальні покриття вільної поверхні рідини. Проте проведення експериментальних досліджень подібних демпфуючих пристроїв доволі затратне і може супроводжуватися пошкодженням коштовних дослідних зразків або небажаними екологічними наслідками. У зв'язку з цим важливого значення набуває комп'ютерне моделювання динаміки рідини в резервуарах, що перебувають у русі. Такі комп'ютерні дослідження дають змогу виконувати віртуальні випробування конструктивних елементів, знаходити руйнівні навантаження, оптимізувати конструктивні параметри баків із демпферами різного типу й підвищувати їхню надійність у реальних умовах експлуатації.

### Огляд сучасного стану питання

На початкових етапах дослідження стійкості резервуарів, частково заповнених рідиною, застосовувалися відносно прості математичні моделі й аналітичні підходи [1–2]. Попри спрощений характер, ці методи дали змогу з'ясувати особливості характеру руху рідини в баках і резервуарах, а також окреслити можливості оптимізації їхніх конструктивних параметрів. Подальший розвиток цього напрямку привів до використання спектрального аналізу, спрямованого на визначення найнижчих (фундаментальних) власних частот коливань рідини в жорстких резервуарах у межах лінійного формулювання задачі [3]. У Згодом вказані моделі були вдосконалені шляхом урахування пружних властивостей стінок резервуарів [4–5].

Останнім часом для вивчення міцності й коливальних процесів у конструкціях, що взаємодіють із рідиною, активно застосовуються сучасні числові підходи. До них належать метод скінченних елементів (МСЕ) [6], метод граничних елементів (МГЕ) [7], безсіткові методи [8], а також методи розкладів у ряди [9]. Крім того, запропоновано різні ефективні засоби зменшення амплітуди плескань рідини, зокрема, використання горизонтальних і вертикальних перегородок [10–11] і плаваючих кришок [12]. Ефективність таких технічних рішень підтверджена як числовими, так і експериментальними дослідженнями. Плескання рідини в призматичних резервуарах вивчено в роботі [13], тоді як резервуари еліптичної форми розглядалися в [14]. Кількісну оцінку впливу перегородок на зменшення нестійкості, спричиненої плесканням рідини, наведено в [15]. Експериментальні дослідження [16], виконані на моделях резервуарів з одним ступенем вільності, виявили суттєвий вплив гідродинамічного демпфування за умов вертикального збудження. Завдяки комплексним дослідженням, що поєднують теоретичні й експериментальні методи, досягнуто суттєвого прогресу в розумінні механізмів динамічної стійкості оболонкових конструкцій при дії динамічних навантажень [17]. У роботах [18–19] здійснено динамічний аналіз пружних резервуарів, заповнених стисливими (акустичними) рідинами, у лінійному формулюванні з урахуванням плескань і капілярних ефектів на вільній поверхні.

У даній статті авторами презентовано удосконалені числові методи розв'язання спектральних крайових задач для визначення фундаментальних частот і форм коливань рідини в жорсткій оболонці обертання. Отримані форми використано як базисні функції під час дослідження вимушених коливань рідини в резервуарі під дією комбінованих горизонтальних і вертикальних навантажень.

### Мета дослідження та формулювання задачі

Метою дослідження є побудова числового методу для вивчення стійкості руху рідини в резервуарах з урахуванням наявності горизонтальної перегородки.

У роботах [10, 20] показано, що найменші власні частоти системи «оболонка–рідина» відповідають режимам коливань вільної поверхні рідини в жорсткій

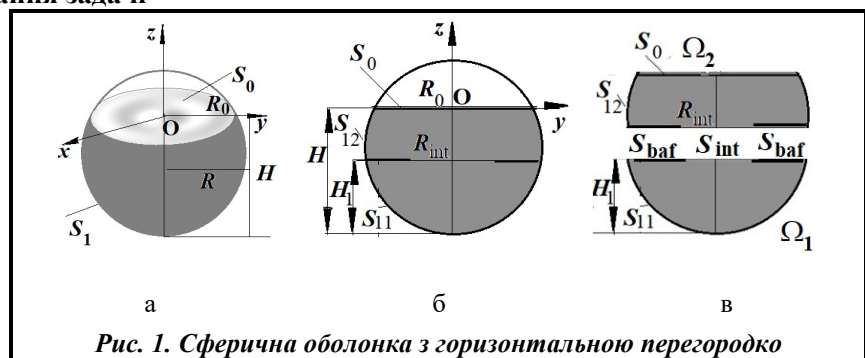


Рис. 1. Сферична оболонка з горизонтальною перегородкою

оболонці. У [20] також визначено умови, за яких взаємодію між коливаннями пружних стінок і плесканням вільної поверхні не можна вважати неістотною; проте такі умови існують лише для оболонок досить малої товщини. З огляду на це надалі розглядаються жорсткі оболонки, частково заповнені рідиною (рис. 1, а).

Досліджується сферична оболонка з горизонтальною перегородкою (рис. 1), аналізується її вплив на спектр власних частот і форми коливань зв'язаної системи «оболонка-рідина», а також на величину підйому вільної поверхні за дії комбінованих гармонічних навантажень у горизонтальному й вертикальному напрямках.

Нехай  $S_1$  позначає змочену поверхню оболонки, а  $S_0$  – вільну поверхню рідини. Зауважимо, що поверхня  $S_1$  включає стінки  $S_{11}$  і  $S_{12}$ , а також поверхню перегородки  $S_{\text{baf}}$ ; встановлено в оболонці на висоті  $H_1$ . Рідина вважається нев'язкою, нестисливою, а її рух безвихровим; впливом капілярних ефектів нехтуємо. Оскільки течія безвихрова, існує скалярний потенціал швидкості  $\Phi$ , такий, що  $V = \nabla\Phi$ , де  $V=(V_1, V_2, V_3)$  – вектор швидкості. В області  $\Omega = \{0 \leq r \leq R, -H \leq z \leq 0\}$ , зайнятій рідиною, цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа  $\nabla^2\Phi(x, t) = 0$ . Для цього рівняння ставимо такі граничні умови:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}; \quad \frac{p-p_0}{\rho_l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - (g + a_v(t))\zeta + a_h(t)x\Big|_{S_0} = 0,$$

де  $n$  – одинична зовнішня нормаль до поверхні;  $p_0$  – атмосферний тиск;  $p$  – тиск рідини;  $a_v(t)$ ,  $a_h(t)$  – прискорення сили, що змушує, у вертикальному й горизонтальному напрямках відповідно;  $\zeta = \zeta(x, y, t)$  – невідома функція, яка описує зміну рівня вільної поверхні рідини з часом.

Таким чином, вивчення плескань рідини в жорсткій оболонці зводиться до визначення двох невідомих функцій,  $\Phi$  і  $\zeta$ , шляхом розв'язання такої крайової задачі:

$$\nabla^2\Phi = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}; \quad p - p_0\Big|_{S_0} = 0.$$

Для розв'язання зв'язаних крайових задач динаміки [20], зокрема, задач взаємодії конструкцій із рідиною [10], широко застосовується метод суперпозиції мод. Його ефективність зумовлена переходом до узагальнених координат, що дозволяє істотно зменшити обчислювальні витрати. У межах підходу нормальних мод невідомі функції  $\Phi$  і  $\zeta$  для оболонок обертання подаються у вигляді розкладів за власними формами

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n \dot{d}_k(t) \varphi_k(x, y, z); \quad \zeta(x, y, t) = \sum_{k=1}^n d_k(t) \zeta_k(x, y),$$

де  $\varphi_k(x, y, z)$  і  $\zeta_k(x, y)$  – базисні функції, а  $d_k(t)$  та  $\dot{d}_k(t)$  – узагальнені координати та їх похідні за часом. Функції  $\varphi_k$  і  $\zeta_k$  задовольняють такі спектральні крайові задачі [10]:

$$\nabla^2\varphi_k = 0; \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k\Big|_{S_1}, \tag{1}$$

де  $\chi_k$  – власні частоти, що відповідають власним формам  $\varphi_k$ . Припустимо, що положення вільної поверхні на початковий момент часу відповідає  $z=0$ . Тоді згідно з (1) підйом вільної поверхні  $\zeta(x, y, t)$  можна записати у вигляді:

$$\zeta(x, y, t) = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^n \chi_k^2 d_k(t) \varphi_k(x, y, 0).$$

Таким чином, базисні функції для обчислення як  $\Phi$ , так і  $\zeta$  можуть бути визначені за допомогою функцій  $\varphi_k(x, y, z)$ . Слід зауважити, що крайова задача (1) є спектральною крайовою задачею [20]. Її розв'язок дає систему базисних функцій, яка надалі використовується для моделювання руху рідини в резервуарах як у лінійному, так і у нелінійному формулюваннях, під дією зовнішніх сил, що збурюють.

### Метод інтегральних рівнянь

Набір базисних функцій  $\{\varphi_k(x, y, z)\}$ , що використовується для апроксимації форм плескання рідини в оболонках обертання, визначається шляхом розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Вказану систему сформульовано в межах концептуального підходу, запропонованого в [21–22]. Для спрощення запису надалі опускаємо індекс  $k$ ; тоді основне інтегральне співвідношення, яке визначає функцію  $\varphi_k(x, y, z)$ , можна подати у вигляді:

$$2\pi\varphi(\mathbf{P}_0) = \iint_{\sigma} q(\mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma - \iint_{\sigma} \varphi(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} d\sigma; \quad \sigma = S_1 \cup S_0, \quad (2)$$

де  $\mathbf{P}, \mathbf{P}_0$  – точки на поверхні  $\sigma$ ;  $|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|$  – декартова відстань між точками  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{P}_0$ ;  $q(\mathbf{P})$  – нормальна похідна функції  $\varphi(\mathbf{P})$  на поверхні  $\sigma$ .

Для оболонки обертання область  $\Omega$ , зайнята рідиною, є тілом обертання, і для розв’язання крайових задач (1) доцільно використовувати циліндричну систему координат  $(\rho, \theta, z)$ , в якій

$$|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + (z - z_0)^2}.$$

Розглянемо такий інтегральний оператор

$$R(\mathbf{P}_0) = \iint_{\sigma} \gamma(P) G(|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|) d\sigma, \quad (3)$$

ядро якого залежить лише від відстані  $|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|$ . Припустимо, що

$$\gamma(\mathbf{P}) = f(\rho, z) \cos(l\theta).$$

Якщо  $\Gamma$  є твірною поверхні  $\sigma$ , то, подавши подвійний інтеграл у (3) у вигляді повторного інтеграла в точці  $\mathbf{P}_0=(\rho_0, \theta_0, z_0)$ , одержимо:

$$\mathbf{R}(\mathbf{P}_0) = \int_{\Gamma} f(\rho, z) \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(l\theta) G(|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|) d\theta \right\} d\Gamma. \quad (4)$$

Зробимо у внутрішньому інтегралі в (4) заміну змінної  $\psi=\theta-\theta_0, \theta=\psi+\theta_0$ . Внаслідок тригонометричної рівності  $\cos(l(\psi + \theta_0)) = \cos(l\psi) \cos(l\theta_0) - \sin(l\psi) \sin(l\theta_0)$  та  $2\pi$  – періодичності функцій у внутрішньому інтегралі в (4), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(l\theta) G(|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(l\theta) G(|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|) d\theta = 0; \\ \int_0^{2\pi} \cos(l\theta) G(|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|) d\theta &= \cos(l\theta_0) \int_0^{2\pi} \cos(l\psi) G(|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|) d\psi. \end{aligned}$$

Звідси

$$\mathbf{R}(\mathbf{P}_0) = f_1(\rho_0, z_0) \cos(l\theta_0),$$

де

$$f_1(\rho_0, z_0) = \int_{\Gamma} f(\rho, z) \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(l\psi) G(|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|) d\psi \right\} d\Gamma.$$

Таким чином, інтегральні оператори в (2) є  $2\pi$ -періодичними. Це дозволяє провести розкладення невідомих функцій в ряди Фур’є, а саме застосувати розкладення

$$\Phi(\rho, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^m \dot{d}_{kl}(t) \varphi_{kl}(\rho, z) \cos(l\theta); \quad (5)$$

$$\zeta(\rho, \theta, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^m d_{kl}(t) \zeta_{kl}(\rho) \cos(l\theta). \quad (6)$$

З урахуванням цих розкладів зводимо крайову задачу (1) до системи одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь у вигляді [10]

$$2\pi\varphi(\rho(z_0), z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(\rho(z), z) \Theta(z, z_0) \rho(z) d\Gamma - \chi^2 \int_0^{R_0} \varphi(\rho, 0) \Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}) \rho d\rho = 0, \quad \mathbf{P}_0 \in S_1; \quad (7)$$

$$2\pi\varphi(\rho, 0) + \int_{\Gamma} \varphi(\rho(z), H) \Theta(z, z_0) \rho(z) d\Gamma - \chi^2 \int_0^{R_0} \varphi(\rho, H) \Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}) \rho d\rho = 0, \quad \mathbf{P}_0 \in S_0.$$

Тут  $R_0$  – радіус вільної поверхні;

$$\Theta(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[ \frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_l(k) - F_l(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_l(k) n_z \right\};$$

$$\Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_l(k); \quad a = \rho^2 + (z - z_0)^2; \quad b = 2\rho r_0.$$

$$E_l(k) = (-1)^l (1 - 4l^2) \int_0^{\pi/2} \cos(2l\theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta; \quad F_l(k) = (-1)^l \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2l\theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta; \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

При значеннях  $k$ , близьких до 1, маємо асимптотичний розклад функції  $F_0(k)$  [23]

$$F_0(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) k'^4 + \dots; \quad k'^2 = 1 - k^2,$$

з якого випливає логарифмічний характер особливості ядра  $\Phi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)$ . Далі розглядаємо ядро  $\Theta(z, z_0)$ . Введемо функцію

$$Q(z, z_0) = \frac{n_r}{2r} \frac{r_0^2 - r^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} + \frac{z_0 - z}{a-b} n_z$$

й отримаємо

$$Q(z, z_0) \approx \frac{1}{(z_0 - z)(1 + (r'_0)^2)} \left[ \frac{n_r [2r_0 r'_0 + (z_0 - z)]}{2r_0} + n_z \right].$$

Оскільки  $n_r r'_0 + n_z = 0$ , то при  $z \rightarrow z_0$  маємо

$$Q(z, z_0) \rightarrow \frac{n_r}{2r_0(1 + (r'_0)^2)} = \frac{1}{2r_0(\sqrt{1 + (r'_0)^2})^3}.$$

Таким чином, ядро  $\Theta(z, z_0)$  також має логарифмічний характер особливості.

Для числового розв'язання системи (7) використано методи, розроблені в [7, 21]. Для врахування перегородок застосовано методи, запропоновані в [10, 11]. У роботі [22] започатковано метод граничних супер-елементів. Цей підхід особливо ефективний при дослідженні складених оболонок, оболонок із перегородками, а також оболонок із розгалуженим меридіаном. У таких випадках вводяться поверхні розділу, які поділяють обчислювальну область на певну кількість під-областей. У кожній з цих підобластей потенціал швидкостей та його нормальна похідна – шукані функції. На поверхнях розділу накладаються умови сумісності.

Далі коливання оболонки із перегородками, частково заповнених рідиною, досліджуються з використанням цього підходу. Область рідини поділяється на дві підобласті  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  (рис. 1, в). Для розділення цих підобластей вводиться штучна поверхня розділу  $S_{\text{int}}$ . Нехай  $S_{11}$  і  $S_{12}$  позначають ділянки поверхні оболонки, що контактують з рідиною в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  відповідно, (рис. 1, в). Таким чином, межі підобластей мають такий вигляд:  $\sigma_1 = \partial\Omega_1 = S_{11} \cup S_{\text{int}}$  та  $\sigma_2 = \partial\Omega_2 = S_{12} \cup S_{\text{int}} \cup S_0$ . Зауважимо, що  $S_{\text{baf}} \subset S_{11}$ ,  $S_{\text{baf}} \subset S_{12}$  та  $S_{\text{bot}} \subset S_{11}$ .

Нехай  $\varphi_1, \varphi_2$  та  $\varphi_0$  – значення потенціалу у вузлах поверхонь  $\sigma_1, \sigma_2$  і  $S_0$ , відповідно. Потоки на поверхнях  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  є відомими з умови непроникності, тоді як на вільній поверхні потік є невідомим і позначається як  $q_0$ . Значення потенціалу й потоку на поверхні розділу  $S_{\text{int}}$  також невідомі й позначаються  $\varphi_{ij}$  і  $q_j$ ,  $S_{\text{int}} \subset \Sigma_j, j=1, 2$  відповідно. Умови сумісності сформульовано у вигляді [22]:

$$\varphi_{2i} = \varphi_{1i}; \quad q_1 = -q_2.$$

Вводимо інтегральні оператори двох типів

$$A(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS; \quad B(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{1}{|P - P_0|} dS, \quad P_0 \in \sigma.$$

Введення поверхонь  $\tilde{S}_1 = S_{11}$ ,  $\tilde{S}_2 = S_{\text{int}}$ ,  $\tilde{S}_3 = S_{12}$ ,  $\tilde{S}_4 = S_0$  дозволяє визначити

$$A_{ij} = A(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j); \quad B_{ij} = A(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j), \quad i, j = \overline{1, 4}.$$

Далі для обчислення потенціалу  $\Phi$  використовується метод граничних супер-елементів [10, 22], що приводить до системи інтегральних рівнянь в операторній формі

$$\begin{aligned} A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_{1i} &= B_{12}q_1, & P_0 \in S_{11}; \\ A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_{1i} &= B_{22}q_1, & P_0 \in S_{\text{int}}; \\ A_{22}\varphi_{1i} + A_{23}\varphi_2 + A_{24}\varphi_0 - \chi^2 B_{24}\varphi_0 &= -B_{22}q_1, & P_0 \in S_{\text{int}}; \\ A_{32}\varphi_{1i} + A_{33}\varphi_2 + A_{34}\varphi_0 - \chi^2 B_{34}\varphi_0 &= -B_{32}q_1, & P_0 \in S_{12}; \\ A_{42}\varphi_{1i} + A_{43}\varphi_2 + A_{44}\varphi_0 - \chi^2 B_{44}\varphi_0 &= -B_{42}q_1, & P_0 \in S_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Систему (9) зводимо до розв'язання проблеми власних значень аналогічно [10]

$$\mathbf{A}\{\varphi_0\} - \chi^2 \mathbf{B}\{\varphi_0\} = 0, \quad (10)$$

де оператори  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  визначаються через  $A_{ij}$  та  $B_{ij}$  як у [10].

### Розв'язувальна система диференціальних рівнянь

У результаті розв'язання спектральної крайової задачі (1) шляхом використання інтегрального зображення (2) й методу граничних суперелементів визначено власні частоти  $\chi_{kl}$  і відповідні моди  $\varphi_{kl}$  коливань рідини в жорсткому резервуарі, де  $k = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{0, m}$ . Отже, розклади (5) і (6) можуть бути застосовані для знаходження невідомих функцій – потенціалу швидкості  $\Phi$  і висоти підйому вільної поверхні  $\zeta$ . Для аналізу руху рідини в оболонках обертання тиск  $p$  визначається за таким співвідношенням [24]:

$$\frac{p}{\rho_l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - (g + a_v(t))z + a_h(t)x + \frac{p_0}{\rho_l}, \quad (11)$$

де  $g$ ,  $a_h(t)$ , і  $a_v(t)$  – прискорення вільного падіння, а також прискорення у горизонтальному й вертикальному напрямках;  $\rho_l$  – густина рідини.

З рівняння (11) отримуємо неоднорідну систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку – систему диференціальних рівнянь Матьє [26]

$$\begin{aligned} \ddot{d}_{k0}(t) + 2\omega_{k0}\xi \dot{d}_{k0}(t) + \omega_{k0}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{k0}(t) &= 0; \\ \ddot{d}_{k1}(t) + 2\omega_{k1}\xi \dot{d}_{k1}(t) + \omega_{k1}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{k1}(t) + a_h(t)F_{k1} &= 0; \quad F_{k1} = \frac{(r, \varphi_{k1})}{(\varphi_{k1}, \varphi_{k1})}; \\ \ddot{d}_{k1}(t) + 2\omega_{k1}\xi \dot{d}_{k1}(t) + \omega_{k1}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{k1}(t) &= 0, \quad k = \overline{1, n}, l = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (12)$$

яку доповнюємо початковими умовами у вигляді

$$d_{kl}(0) = d_{kl}^0; \quad \dot{d}_{kl}(0) = \dot{d}_{kl}^1, \quad k = \overline{1, n}, l = \overline{0, m}. \quad (13)$$

Система диференціальних рівнянь (12) із початковими умовами (13) описує динамічну поведінку рідини в оболонці за умов спільної дії вертикальних і горизонтальних збуджень. У рівняннях руху (12) щодо модальних координат  $d_{kl}(t)$ , які описують коливання вільної поверхні рідини, для імітації мінімальних дисипативних ефектів до початкової форми без демпфування додано штучне демпфування, пропорційне швидкості  $2\omega_{kl}\xi \dot{d}_{kl}(t)$ , де  $\xi$  – відносний коефіцієнт демпфування (damping ratio), [27]. Надалі демпфування в моделі ідеальної рідини використано з коефіцієнтом  $\xi=0.005-0.01$  (0.5–1%), що відповідає рекомендаціям АСІ 350.3-06 та Eurocode 8 для мод плескання рідини в резервуарах [27].

### Числовий аналіз коливань рідини в жорсткому сферичному резервуарі

Як тестовий приклад розглядається сферична оболонка без перегородок радіуса  $R=1$  м, частково заповнена ідеальною нестисливою рідиною на глибину  $H_1$  (рис. 1, а). Для розв'язання проблеми власних значень (10) використовувалися граничні елементи із сталою апроксимацією густини [10]. Обиравалася різна кількість граничних елементів вздовж твірної ( $N_r$ ) і радіусу вільної поверхні ( $N_0$ ). У табл. 1 наведені результати визначення частот аксіально симетричних коливань рідини в зазначеному резервуарі при різних рівнях заповнення  $H_1$ .

Таблиця 1. Частоти аксіально-симетричних коливань ( $l=0$ ) вільної поверхні рідини в сферичному резервуарі

k	Метод	Рівень заповнення $H_1$ , м					
		0,2	0,6	1,0	1,4	1,8	1,99
1	[25]	3,8261	3,6501	3,7452	4,2452	6,7645	29,0505
	МГЕ, $N_1=60, N_0=30$	3,8302	3,6563	3,7409	4,2409	6,7634	29,0281
	МГЕ, $N_1=130, N_0=65$	3,8267	3,6510	3,7449	4,2445	6,7640	29,0389
	МГЕ, $N_1=260, N_0=130$	3,8262	3,6502	3,7451	4,2450	6,7644	29,0495
2	[25]	9,2569	7,2652	6,9763	10,0128	12,1131	51,8123
	МГЕ, $N_1=60, N_0=30$	9,2672	7,2681	6,9774	10,0157	12,1237	52,2536
	МГЕ, $N_1=130, N_0=65$	9,2571	7,2662	6,9770	10,0144	12,1228	52,4500
	МГЕ, $N_1=260, N_0=130$	9,2670	7,2653	6,9766	10,0130	12,1130	51,8151

Як свідчать наведені в табл. 1 результати, запропонований метод суперелементів демонструє збіжність при збільшенні кількості граничних елементів. Подальше зростання їх числа не призводить до суттєвих змін результатів. Отримані дані добре узгоджуються з результатами, наведеними в роботі [25].

Далі дослідимо сферичну оболонку радіусом 1 м, з рівнем заповнення  $H=1,4$  м, в якій перегородку розташовано на рівні  $H_1=1,0$  м. Розглянуто внутрішні горизонтальні перегородки, які характеризуються радіусом  $R_{int}$  поверхні інтерфейсу; радіус перегородки  $R_b=R-R_{int}$ .

Перші три власні частоти для моди  $l=1$  обчислено для значень  $R_{int}=0,2$  м,  $R_{int}=0,7$  м та  $R_{int}=1,0$  м. Слід вказати, що значення  $R_{int}=1,0$  м відповідає баку без перегородки. Отримані значення частот наведено в табл. 2. Вздовж твірної та радіусу вільної поверхні обиралися такі значення кількості елементів:  $N_1=260$  і  $N_0=130$  відповідно.

Таблиця 2. Частоти неаксіально-симетричних коливань ( $l=1$ ) вільної поверхні рідини в сферичному резервуарі з різними перегородками

k	$R_{int}=0,2$ м	$R_{int}=0,7$ м	$R_{int}=1,0$ м
1	1,4234	2,0436	2,1234
2	5,8405	5,9723	5,9807
3	9,4567	9,4785	9,4789

Таблиця 3. Параметри навантаження

Навантаження	$a_h$	$a_v$	$\omega_h$	$\omega_v$
A	0,6	1,0	3,7453	1,0000
B	0,6	1,0	1,0000	3,1234
C	0,6	1,0	1,0000	1,1234
D	0,0	1,0	1,0000	4,2468

Наступним кроком є з'ясування необхідної кількості членів ряду в розкладах (5), (6) для досягнення необхідної точності. Виявилось, що для досягнення точності  $\epsilon=10^{-3}$  достатньо трьох членів ряду в цих розкладах. Будемо розглядати сферичну оболонку  $R=1$  м без перегородки і з перегородкою, встановленою на висоті  $H_1=1,0$  м, з рівнем заповнювання  $H=1,4$  м та  $R_{int}=0,2$  м під дією горизонтальних і вертикальних навантажень. Вважаємо, що

$$a_h(t) = a_0 \cos(\omega_0 t); \quad a_v(t) = a_1 \cos(\omega_1 t). \quad (14)$$

Для числового аналізу обираємо значення параметрів навантаження (14), наведені в табл. 3.

Всі навантаження, параметри яких наведено в табл. 3, призводять до необмеженого зростання амплітуди вільної поверхні з часом. Це явище не є фізично допустимим; такі вібрації виникають внаслідок припущень, що спрощують реальну картину. Для більш обґрунтованих висновків слід залучати теорію руху в'язкої рідини, або розглядати нелінійні формулювання в теорії потенціального руху ідеальної нестисливої рідини. Проте отримані розв'язки, засновані на припущеннях лінійної теорії, дають можливість надати попередню оцінку стійкості руху рідини в оболонках, провести відстроювання від небажаних резонансних частот. На рис. 2–5 наведені саме такі результати, що відповідають втраті стійкості руху рідини в резервуарі. Цифрами 1 позначені криві (чорні лінії), що відповідають руху рідини в резервуарі без перегородки, цифрами 2 – за наявності перегородки, встановленої у сферичній оболонці на рівні  $H_1=1,0$  м (сині лінії), цифри 3 відповідають даним (зелені лінії), отриманим при застосуванні демпфування по Релею. У цих розрахунках обиралися  $\xi=0,005$ , що в [27] трактується як реальне демпфування.

На рис. 2 показано зміну рівня вільної поверхні рідини з часом в умовах резонансу, який виникає, коли частота горизонтального збурення збігається з першою власною частотою нульової гармоніки (випадок А). Цей режим призводить до суттєвого зростання амплітуди коливань вільної поверхні й може істотно вплинути на динамічну поведінку зв'язаної системи «резервуар–рідина».

На рис. 3 і 4 наведено часові залежності підйому вільної поверхні рідини для випадків так званих субрезонансів, які виникають, коли сума або різниця частот вертикального і горизонтального збурень збігається з першою власною частотою коливань рідини.

На рис. 3 крива 1 (чорна лінія) відповідає випадку навантаження, коли різниця між частотами вертикального і горизонтального збурень дорівнює першій власній частоті (випадок В). Натомість на рис. 4 крива 1 відповідає випадку, коли сума частот вертикального і горизонтального збурень дорівнює першій власній частоті (випадок С). В обох випадках спостерігається помітне лінійне зростання амплітуди коливань вільної поверхні, що свідчить про можливість значних плескань рідини за умов комбінованого збурення.

На рис. 5 наведено залежність підйому вільної поверхні рідини від часу в умовах параметричного резонансу. Такий режим виникає, коли частота вертикального збурення дорівнює подвоєній першій власній частоті коливань рідини в жорсткому резервуарі, що відповідає першій гармоніці. За цих умов спостерігається виражене експоненціальне зростання амплітуди коливань (випадок D), що є характерною ознакою параметричної нестійкості.

Таким чином, досліджено коливання рідини у сферичних резервуарах як без горизонтальних перегородок, так і за їх наявності. Показано, що встановлення горизонтальної перегородки суттєво зменшує рівень підйому вільної поверхні рідини. Для врахування втрат енергії застосовано демпфування за Релеєм, що базується на використанні емпіричних коефіцієнтів. Встановлено, що при цьому в резервуарах без перегородок амплітуда коливань вільної поверхні рідини зменшується, проте з часом навіть за наявності демпфування за Релеєм спостерігається її незначне зростання. На рис. 6 зображено зміну рівня вільної поверхні в резервуарі без перегородки.

Рис. 6 демонструє вплив штучного демпфування на динаміку вільної поверхні рідини у сферичному резервуарі під час параметричного резонансу.

Криві 1, 2 і 3 відповідають значенням  $\xi=0$  (чорна),  $\xi=0,005$  (зелена) та  $\xi=0,01$  (синя). Введення демпфування за Релеєм приводить

до помітного зниження амплітуд коливань на початкових етапах процесу. Однак у всіх випадках без перегородок амплітуда з часом продовжує зростати, що свідчить про домінування параметричного механізму нестійкості.

Лише встановлення горизонтальних перегородок забезпечує перехід до стаціонарного періодичного режиму з обмеженими і стабільними амплітудами коливань, що підтверджує їх ефективність як засобу пасивного гасіння плескань.

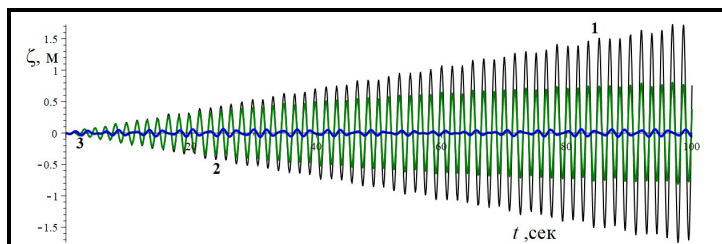


Рис. 2. Зміна рівня підйому вільної поверхні за часом, навантаження А

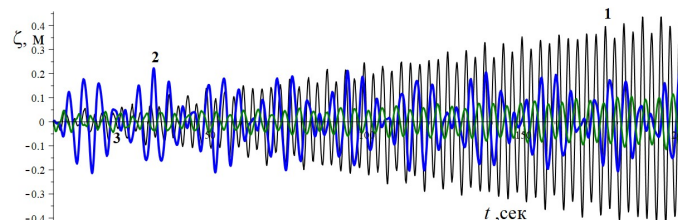


Рис. 3. Зміна рівня підйому вільної поверхні за часом, навантаження В

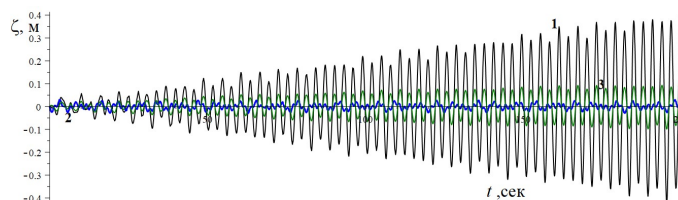


Рис. 4. Зміна рівня підйому вільної поверхні за часом, навантаження С

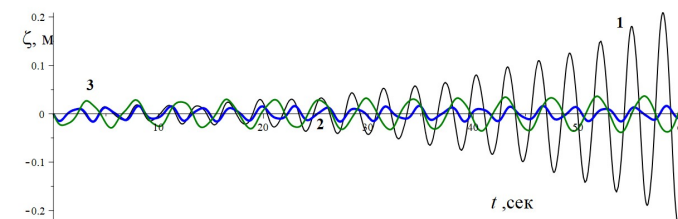


Рис. 5. Зміна рівня підйому вільної поверхні за часом, навантаження D

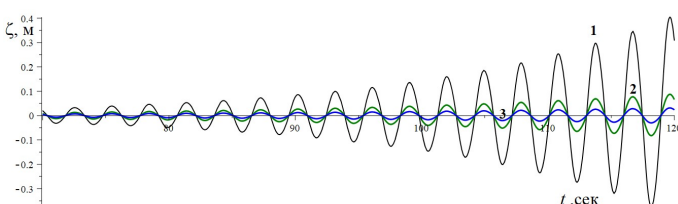


Рис. 6. Зміна рівня підйому вільної поверхні за часом (t від 70 до 120) сек, навантаження D

Отримані результати розкривають механізми резонансного та субрезонансного збудження плескань рідини. Подібні ефекти відіграють важливу роль у динамічній поведінці частково заповнених резервуарів, що піддаються складним збуренням. Тому поданий аналіз може бути корисним під час проєктування й оцінювання безпеки паливних баків, а також промислових резервуарів, призначених для зберігання і транспортування небезпечних рідин.

## Висновки

Розроблено й реалізовано ефективний числовий підхід до дослідження коливань і стійкості руху рідини в жорстких сферичних резервуарах, частково заповнених рідиною. На основі теорії потенціального руху рідини й методу граничних елементів розв'язано спектральні крайові задачі для визначення власних частот і форм коливань рідини як у сферичних резервуарах без перегородок, так і в резервуарах із горизонтальними перегородками. Отримані форми коливань використано як базисні функції при дослідженні вимушених коливань. Динамічну задачу зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь типу Мат'є, що дало змогу вивчити області стійкості руху рідини у сферичних резервуарах за умов комбінованих навантажень. Для врахування дисипативних ефектів у моделі використано демпфування за Релеєм, засноване на застосуванні емпіричних коефіцієнтів. Отримано числові результати, які характеризують виникнення параметричного резонансу, субрезонансних режимів, а також резонансу, зумовленого горизонтальним прискоренням. Показано особливості розвитку коливань вільної поверхні рідини у вказаних режимах. Запропонований підхід може бути використаний для проведення віртуальних випробувань сферичних резервуарів, а також для аналізу поведінки рідини під час проєктування й експлуатації резервуарів і паливних баків в аерокосмічній техніці. Подальші дослідження будуть спрямовані на вивчення зазначених резонансних явищ у межах уточнених математичних моделей.

## Література

1. Housner G. W. Dynamic pressures on accelerated fluid containers. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1957. Vol. 47. Iss. 1. P. 15–35. <https://doi.org/10.1785/BSSA0470010015>.
2. Housner G. W. Dynamic behavior of water tanks. *Bulletin of Seismological Society of America*. 1963. Vol. 53. Iss. 2. P. 381–387. <https://doi.org/10.1785/BSSA0530020381>.
3. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics. Theory and applications. Cambridge University Press, 2005. 972 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511536656>.
4. Veletsos A. S., Yang J. Y. Dynamics of fixed-base liquid-storage tanks. In: *Proceedings of U.S.–Japan Seminar on Earthquake Engineering Research with Emphasis on Lifeline Systems*, (Tokyo, Japan, November, 1976). 1976. Vol. 8–1. P. 317–341.
5. Sun S. Y., Wu G. X. Sloshing in a tank with elastic side walls and a membrane cover. *Physics of Fluids*. 2024. Vol. 36. Iss. 10. Article 102127. <https://doi.org/10.1063/5.0238210>.
6. Shvets A., Murawski K., Fedorov Y. Analytical determination of critical forces during buckling of systems consisting of two pinned connected rods. *Meccanica*. 2025. Vol. 60. P. 441–455. <https://doi.org/10.1007/s11012-025-01941-3>.
7. Gnitko V. I., Karaiev A. O., Degtyariev K. G., Vierushkin I. A., Strelnikova E. A. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2022. Vol. 134. P. 67–79. <https://doi.org/10.2495/BE450061>.
8. Smetankina N., Pavlikov V. Mathematical model of the stress state of the antenna radome joint with the load-bearing edging of the skin cutout. In: Ciobață D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) - 2021*. ICoRSE 2021. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2021. Vol. 305. P. 287–295. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-83368-8\\_28](https://doi.org/10.1007/978-3-030-83368-8_28).
9. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Misiura S., Misiura I. Modelling thermal stresses in laminated aircraft elements of a complex form with account of heat sources. In: Ciobață D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) - 2022*. ICoRSE 2022. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022. Vol. 534. P. 233–246. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22).
10. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 25. Iss. 3. P. 117–132. <https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038>.
11. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid vibrations in cylindrical quarter tank subjected to harmonic, impulse and seismic lateral excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019. Vol. 5. Iss. 3. P. 31–41.

12. Choudhary N., Bora S. N., Strelnikova E. Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2021. Vol. 9. P. 1577–1589. <https://doi.org/10.1007/s42417-021-00314-w>.
13. Balas O.-M., Doicin C. V., Cipu E. C. Analytical and numerical model of sloshing in a rectangular tank subjected to a braking. *Mathematics*. 2023. Vol. 11. Iss. 4. P. 949–955. <https://doi.org/10.3390/math11040949>.
14. Liu L., Li J. Dynamic deformation and perforation of ellipsoidal thin shell impacted by flat-nose projectile. *Materials*. 2022. Vol. 15. Iss. 12. Article 4124. <https://doi.org/10.3390/ma15124124>.
15. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyarev K. Seismic loads influence treatment on the liquid hydrocarbon storage tanks made of nanocomposite materials. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. 2022. Vol. 17. P. 62–70. <https://doi.org/10.37394/232011.2022.17.9>.
16. Martínez-Carrascal J., González-Gutiérrez L. Experimental study of the liquid damping effects on a SDOF vertical sloshing tank. *Journal of Fluids and Structures*. 2021. Vol. 100. Article 103172. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103172>.
17. Gani E., Öztürk S., Sari A. Effects of liquid sloshing in storage tanks. An overview of analytical, numerical, and experimental studies. *International Journal of Steel Structures*. 2025. Vol. 25. P. 544–556. <https://doi.org/10.1007/s13296-025-00946-8>.
18. Lu T., Cao D. Comparative study on wave response to vertical baffle orientation for resonant sloshing suppression in an upright cylindrical tank. *Ocean Engineering*. 2025. Vol. 341. Part 2. Article 122526. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2025.122526>.
19. Degtyariov K., Kriutchenko D., Osypov I., Sierikova O., Strelnikova E. Dampers influence on sloshing mitigation in fuel tanks of launch vehicles and reservoirs. In: Nechyporuk M., Pavlikov V., Krytskyi D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2023. ICTM 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2024. Vol. 1008. P. 420–430. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-61415-6\\_36](https://doi.org/10.1007/978-3-031-61415-6_36).
20. Raynovskyy I. A., Timokha A. N. Sloshing in upright circular containers: Theory, analytical solutions, and applications. *CRC Press*, 2020. 170 p. <https://doi.org/10.1201/9780429356711>.
21. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques*. Berlin and New York: Springer-Verlag, 1984. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3>
22. Brebbia C. A., Domínguez J. *Boundary elements: An introductory course*. Computational Mechanics Publications / McGraw-Hill, 1992.
23. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Table of integrals, series, and products*. Amsterdam: Academic Press, 2007.
24. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyariov K. Strength characteristics of liquid storage tanks with nanocomposites as reservoir materials. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, Kharkiv, Ukraine. 2022. P. 1–7. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916369>.
25. Kovacic I., Rand R. H., Sah S. M. Mathieu's equation and its generalizations: Overview of stability charts and their features. *Applied Mechanics Reviews*. 2018. Vol. 70. Iss. 2. Article 020802. <https://doi.org/10.1115/1.4039144>.
26. Mciver P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *Journal of Fluid Mechanics*. 1989. Vol. 201. P. 243–257. <https://doi.org/10.1017/S0022112089000923>.
27. Yang H., Purandare Q., Peugeot R., West J. Prediction of liquid slosh damping using a high resolution CFD tool. 48th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, USA, Georgia, Atlanta, 30 July–01 August 2012. 2012. P. 1–14. <https://doi.org/10.2514/6.2012-4294>.

Надійшла до редакції 10.02.2026