УДК 517.95+519.63

РОЗВИТОК НЕАРХИМЕДОВОГО ОБЧИСЛЕННЯ В. Л. РВАЧОВА

[1] **М. С. Синєкоп**, д-р техн. наук

[1] **Л. К. Кравченко**, канд. фіз.-мат. наук

[2] **Т. І. Шейко**, д-р техн. наук
sheyko@ipmach.kharkov.ua
ORCID: 0000-0003-3295-5998

[1] Державний біотехнологічний університет,
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44

[2] Інститут енергетичних машин і систем
ім. А. М. Підгорного НАН України,
61099, Україна, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10

Статтю підготовлено учнями академіка В. Л. Рвачова – автора неархімедового обчислення. Структурно стаття поділяється на три розділи. У першому з них досліджено релятивістську формулу n-арного додавання. Перетворення згаданої формули дозволили отримати чотири наслідки, що становлять: дві пари взаємно зворотних функцій, які з урахуванням їх властивостей визначають конструкцію неархімедового обчислення; структуру релятивістського ряду; два відображення множин $\Re=(-\infty, \infty)$ и $\text{ɤ}=(-c, c)$. У другому розділі представлено релятивістську тригонометрію, яка включає формули: додавання; перетворення суми тригонометричних функцій на добуток; перетворення добутку тригонометричних функцій на суму. У третьому розділі за допомогою релятивістської експоненти отримано формули релятивістських гіперболічних функцій та виписано їх властивості.

***Ключові слова**: неархімедове обчислення, обчислення з максимальним числом, неархімедова алгебра, кінцева нескінченність, релятивістський натуральний ряд.*

Присвячується 100-річчю з дня народження нашого Учителя – академіка В. Л. Рвачова

Вступ

Сьогодні для природознавства, і передусім для фізики, актуальними є питання рахування у тих випадках, коли змінна деякої множини (наприклад, множини натурального ряду чисел) зростає понад усі межі. Дійсно, відомі проблеми, а саме розбіжностей у релятивістській квантовій механіці й сингулярності в теорії чорних дірок, «початку» в деяких космологічних моделях, ставлять задачу екстраполяції рахування у бік величин, що виходять за рамки емпірично обґрунтованих, на одне з перших місць за ступенем важливості. Очевидно, що мають бути внесені суттєві зміни до логіки й методології постнекласичного етапу розвитку науки в цілому.

Саме в галузі природознавства необхідне кардинальне інтелектуальне «втручання» не тільки в процес пошуку адекватних геометричних моделей просторово-часових відносин мікро- і мегасвіту, що вже достатньо довго і з перемінним успіхом здійснюється на основі неевклідових геометрій, а й (навіть у першу чергу) у побудову основ адекватних арифметичних моделей в області нескінченно великих (малих) значень. Без сумніву, нові моделі, які претендують на правильність, повинні узгоджуватися з апробованою класичною архімедовою моделлю арифметики і мають збігатися з нею у відомій з досвіду області реального рахування, що є відображенням добре відомого в природознавстві принципу відповідності. Вперше цієї проблеми торкнувся П. К. Рашевський у роботі [1].

Конкретну реалізацію ідеї такого гіпотетичного натурального ряду у вигляді побудови конкретного формально-математичного апарату рахування з видозміненою аксіомою Архімеда було запропоновано В. Л. Рвачовим [2–6]. Вказана модель неархімедової арифметики є, мабуть, першою конструктивною для природознавства реалізацією зняття догм із класичного натурального ряду. У ній автор, використовуючи теорему складання швидкостей у спеціальній теорії відносності, побудував, зокрема, арифметичні операції, які відповідають припущенню про існування деякого кінцевого числа c, більше якого чисел немає. Уже перший аналіз моделі дає змогу переконатися, що в даному випадку ми отримали конкретну математичну модель числового ряду, який має онтологічний образ актуальної нескінченності – реалізацію гегелівської «кінцевої нескінченності» як граничне число. Це, у свою чергу, дозволяє сподіватися на суттєве просування у вирішенні проблем (парадоксів) канторівської теорії множин, пов'язаних із поняттям актуальної нескінченності.

Таким чином, можна сказати, що методологічно виправданий підхід, ініційований П. К. Рашевським і вперше реалізований у роботах В. Л. Рвачова, суть якого зводиться до введення в

Статтю ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons «Attribution» («Атрибуція») 4.0 Міжнародна.
© М. С. Синєкоп, Л. К. Кравченко, Т. І. Шейко, 2026

аксіоматику арифметики актуальної (кінцевої) нескінченності, не тільки дає новий імпульс пошуку адекватного опису реальності в області нескінченно великого, а й вказує конкретний шлях до побудови онтологічної моделі актуального (скінченного) нуля в області нескінченно малих величин.

1. Наслідки з формули *n*-арного додавання та їх застосування

Відправною точкою при написанні цього розділу є релятивістське *n*-арне додавання [2], яке представляється формулою

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{\circ} x_i = x_1 \overset{\circ}{+} x_2 \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} x_n = \frac{(1+\alpha x_1)(1+\alpha x_2)\ldots(1+\alpha x_n)-(1-\alpha x_1)(1-\alpha x_2)\ldots(1-\alpha x_n)}{\alpha[(1+\alpha x_1)(1+\alpha x_2)\ldots(1+\alpha x_n)+(1-\alpha x_1)(1-\alpha x_2)\ldots(1-\alpha x_n)]}. \tag{1}$$

Тут

$$x \overset{\circ}{+} y = \frac{x+y}{1+\alpha^2 xy};\ \alpha=c^{-1}\ \text{– релятивістське додавання;} \tag{2}$$

c – найбільше число, що задовольняє умові MAXI: для $|x| \le c$, $|y| \le c$ маємо $x \overset{\circ}{+} y \le c$.

Зазначимо, що у статті збережено всі позначення, введені В. Л. Рвачовим під час викладення теорії неархімедового обчислення [2–4].

Припускаємо, що в (1) $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, тоді маємо

$$\underbrace{x \overset{\circ}{+} x \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} x}_{n\ \text{разів}} = M[N(x)^n]. \tag{3}$$

Наслідок 1.

$$M(x)=\frac{1}{\alpha}\frac{x-1}{x+1};\ N(x)=\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}. \tag{4}$$

Зауважимо, що функції $M(x)$ та $N(x)$ взаємно обернені, тобто

$$M(N(x))=N(M(x))=x. \tag{5}$$

Далі вважаємо, що x=1, тоді отримаємо

$$\overset{\circ}{n} = M[(N(1))^n], \tag{6}$$

де $\underbrace{\overset{\circ}{n}=1\overset{\circ}{+}1\overset{\circ}{+}\ldots\overset{\circ}{+}1}_{n\ \text{разів}}$.

Розглянемо алгоритм визначення членів релятивістського натурального ряду. Перші два члени $\overset{\circ}{0}$ і $\overset{\circ}{1}$ отримаємо при підстановці в формулу (6) n=0 и n=1 відповідно. Завдяки елементарному обчисленню маємо

Наслідок 2. $\overset{\circ}{0}=0$, $\overset{\circ}{1}=1$.

Наступні члени ряду отримуємо з використанням такої послідовності формул [2]

$$\overset{\circ}{2}=1\overset{\circ}{+}1;\quad \overset{\circ}{3}=\overset{\circ}{2}\overset{\circ}{+}1;\quad \overset{\circ}{\overbrace{n+1}}=\overset{\circ}{n}\overset{\circ}{+}1,\ \ldots$$

і, нарешті, записуємо релятивістський натуральний ряд

$$\overset{\circ}{N}=\left(0,1,\overset{\circ}{2},\overset{\circ}{3},\ldots,\overset{\circ}{n},\ldots\right). \tag{8}$$

Зазначимо, що при α=0 ряд (8) збігається із звичайним натуральним рядом

$$N=(0,1,2,3,\ldots,n,\ldots). \tag{9}$$

Обернемо формулу (6), виразивши n через $\overset{\circ}{n}$ за допомогою наступної послідовності перетворень

$$N(\overset{\circ}{n})=[N(1)]^n;\quad \ln N(\overset{\circ}{n})=n\ln N(1);\quad n=\gamma\ln N(\overset{\circ}{n}), \tag{10}$$

де $\gamma=\ln^{-1}N(1)$.

Ліву і праву частини третьої формули з (10) розділимо на γ, отримаємо

$$\frac{n}{\gamma} = \ln N(\overset{o}{n}). \tag{11}$$

Результат потенціювання виразу (11) записуємо формулою

$$\exp\left(\frac{n}{\gamma}\right) = N(\overset{o}{n}).$$

Виходячи з властивості (5) остання формула набуває вигляду

$$\overset{o}{n} = M\left(\exp\frac{n}{\gamma}\right). \tag{12}$$

Формули (10), (12) вірні для будь-яких, а не лише цілих, *n*.

Таким чином, формули (10) та (12) визначають ($x=n$, $\overset{o}{x} = \overset{o}{n}$)

Наслідок 3.

$$\overset{o}{x} = M\left(\exp\frac{x}{\gamma}\right); \quad x = \gamma \ln N(\overset{o}{x}). \tag{13}$$

Перша формула (13) є відображенням $\Re=(-\infty, \infty)$ на $x=(-c, c)$, друга – зворотне до нього відображення $x \to \Re$, де $M(x)$ і $N(x)$ визначаються формулами (4).

Праву частину першої формули (13) позначимо $\nu(x)$. Зворотну до $\nu(x)$ функцію $\tau(x)$ знаходимо, реалізуючи послідовність

$$\nu(\tau(x)) = M\left(\exp\frac{\tau(x)}{\gamma}\right) = x; \quad \exp\left(\frac{\tau(x)}{\gamma}\right) = N(x); \quad \frac{\tau(x)}{\gamma} = \ln N(x).$$

У результаті отримуємо наступний

Наслідок 4.

$$\nu(x) = M\left(\exp\frac{x}{\gamma}\right); \quad \tau(x) = \gamma \ln N(x), \tag{14}$$

де $\gamma = \ln^{-1} N(1)$.

Зазначимо, що функції $\nu(x)$ та $\tau(x)$ є взаємно зворотними

$$\nu(\tau(x)) = \tau(\nu(x)) = x \ \text{(або } \nu\tau x = \tau\nu x = x\text{)}$$

і задовольняють умовам

$$\nu(0) = 0; \quad \nu(1) = 1; \quad \tau(0) = 0; \quad \tau(1) = 1. \tag{15}$$

Обидві функції $\nu(x)$ і $\tau(x)$ – монотонно зростаючі на інтервалі $x=(-c, c)$.

Скористаємося формулою

$$x \overset{o}{*} y = \nu[\tau(x) * \tau(y)] \tag{16}$$

для отримання релятивістських операцій. Тут * – одна з чотирьох арифметичних операцій, а $\overset{o}{*}$ – відповідна їй релятивістська операція.

1) Релятивістське додавання

Покажемо, що $\nu[\tau(x) + \tau(y)] = \dfrac{x+y}{1+\alpha^2 xy}$. Згідно з формулами (4), (14) отримуємо

$$x \overset{o}{+} y = \nu[\tau(x) + \tau(y)] = M\left[\exp\left(\frac{1}{\gamma}(\gamma \ln N(x) + \gamma \ln N(y))\right)\right] = M[\exp\ln(N(x)N(y))] = M[N(x)N(y)] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{N(x)N(y)-1}{N(x)N(y)+1}\right] = \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}\frac{1+\alpha y}{1-\alpha y}-1}{\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}\frac{1+\alpha y}{1-\alpha y}+1} = \frac{1}{\alpha}\frac{(1+\alpha x)(1+\alpha y)-(1-\alpha x)(1-\alpha y)}{(1+\alpha x)(1+\alpha y)+(1-\alpha x)(1-\alpha y)} = \frac{x+y}{1+\alpha^2 xy},$$

що відповідає формулі (2).

2) Релятивістське віднімання

За допомогою формули (16) покажемо, що $\nu[\tau(x)-\tau(y)]=\dfrac{x-y}{1-\alpha^2 xy}$. Скористаємося перетвореннями попереднього пункту, маємо

$$x\overset{\circ}{-}y=\nu[\tau(x)-\tau(y)]=M\left[\exp\left(\frac{1}{\gamma}(\gamma\ln N(x)-\gamma\ln N(y))\right)\right]=M\left[\frac{N(x)}{N(y)}\right]=\frac{x-y}{1-\alpha^2 xy}.$$

Таким чином, отримуємо релятивістське віднімання

$$x\overset{\circ}{-}y=\frac{x-y}{1-\alpha^2 xy}. \tag{17}$$

Властивості операцій $x\overset{\circ}{+}y$ і $x\overset{\circ}{-}y$ наведені в роботах [2–4], а аналіз деяких з них дозволив зробити висновок, що операція $x\overset{\circ}{+}y$ визначає на інтервалі (-*c*, *c*) адитивну абелеву групу з нульовим елементом 0 і протилежним до *x* елементом (-*x*).

3) Релятивістське множення

Для цієї операції формула (16) набуває вигляду

$$x\circ y=\nu[\tau(x)\tau(y)]=M\left[\exp\left(\frac{1}{\gamma}((\gamma\ln N(x))(\gamma\ln N(y)))\right)\right]=M[\exp(\gamma\ln N(x)\ln N(y))]$$

або, з урахуванням формул (4), отримаємо

$$x\circ y=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\exp\left[\gamma\ln\left|\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}\right|\ln\left|\frac{1+\alpha y}{1-\alpha y}\right|\right]-1}{\exp\left[\gamma\ln\left|\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}\right|\ln\left|\frac{1+\alpha y}{1-\alpha y}\right|\right]+1}\right\}. \tag{18}$$

4) Релятивістське ділення

Згідно з формулою (16) отримуємо

$$x\,\overset{\circ}{\circ}\,y=\nu\left[\frac{\tau(x)}{\tau(y)}\right]=M\left[\exp\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\gamma\ln N(x)}{\gamma\ln N(y)}\right)\right]=M\left[\exp(\frac{1}{\gamma}\ln N(x)\ln^{-1}N(y))\right]$$

або, враховуючи формули (4), запишемо

$$x\,\overset{\circ}{\circ}\,y=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\exp\left[\frac{1}{\gamma}\ln\left|\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}\right|\ln^{-1}\left|\frac{1+\alpha y}{1-\alpha y}\right|\right]-1}{\exp\left[\frac{1}{\gamma}\ln\left|\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}\right|\ln^{-1}\left|\frac{1+\alpha y}{1-\alpha y}\right|\right]+1}\right\}. \tag{19}$$

Властивості операцій $x\circ y$ і $x\,\overset{\circ}{\circ}\,y$ зазначені у [2–4].

У [4] було показано, що операція $x\circ y$ визначає на $\Re_0=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $x(x\neq 0)$ мультиплікативну абелеву групу. Існування одиниці випливає з наступного: оскільки $\tau(1)=1$, то $x\circ 1=\nu[\tau(x)\cdot 1]=x$. Оберненим до *x* буде елемент $x^{-1}=\dfrac{1}{\tau(x)}$.

Таким чином, робимо висновок, що система операцій $\overset{\circ}{\Pi}=\left(x\overset{\circ}{+}y,x\overset{\circ}{-}y,x\circ y,x\,\overset{\circ}{\circ}\,y\right)$ визначає на множині x=(-*c*, *c*) поле [2]. Ізоморфізм полів $\overset{\circ}{\Pi}$ та $\Pi=(x+y,x-y,xy,x/y)$ реалізується відображеннями (13).

2. Релятивістська тригонометрія

У роботі [4] релятивістські синус і косинус представлені у вигляді рядів

$$\sin_{\circ} x = x \overset{\circ}{-} (1 \overset{\circ}{\circ} 3!) \circ x^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} (1 \overset{\circ}{\circ} 5!) \circ x^{\overset{\circ}{5}} \overset{\circ}{-} \ldots, \tag{20}$$

$$\cos_{\circ} x = 1 \overset{\circ}{-} (1 \overset{\circ}{\circ} 2!) \circ x^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{+} (1 \overset{\circ}{\circ} 4!) \circ x^{\overset{\circ}{4}} \overset{\circ}{-} \ldots \tag{21}$$

й доведено, з використанням похідної, що

$$\sin_{\circ}^{\overset{\circ}{2}} x \overset{\circ}{+} \cos_{\circ}^{\overset{\circ}{2}} x = 1,$$

а також за допомогою рядів (20), (21) показано, що

$$\sin_{\circ}(\overset{\circ}{2} \circ x) = \overset{\circ}{2} \circ \sin_{\circ} x \circ \cos_{\circ} x.$$

Далі В. Л. Рвачов пише: «Встановлення інших формул для $\sin_{\circ} x$ і $\cos_{\circ} x$ надамо читачам». Цим ми й займемося у цьому розділі.

1) Формули складання й віднімання:

$$\sin_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = \sin_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{+} \cos_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y;$$

$$\sin_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y) = \sin_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{-} \cos_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y;$$

$$\cos_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = \cos_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{-} \sin_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y;$$

$$\cos_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y) = \cos_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{+} \sin_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y.$$

Ці чотири формули становлять основу для отримання наступних формул.

2) Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій на добуток:

$$\sin_{\circ} x \overset{\circ}{+} \sin_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \sin_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right) \circ \cos_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right);$$

$$\sin_{\circ} x \overset{\circ}{-} \sin_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \sin_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right) \circ \cos_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right);$$

$$\cos_{\circ} x \overset{\circ}{+} \cos_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \cos_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right) \circ \cos_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right);$$

$$\cos_{0} x \overset{\circ}{-} \cos_{0} y = \overset{\circ}{2} \circ \sin_{0}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right) \circ \sin_{0}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}\right).$$

3) Формули перетворення тригонометричних функцій на їх додавання й віднімання:

$$\sin_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y = \left(\sin_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{+} \sin_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y)\right) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2};$$

$$\cos_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y = \left(\cos_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{+} \cos_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y)\right) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2};$$

$$\sin_{0} x \circ \sin_{0} y = \left(\cos_{0}(x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{-} \cos_{0}(x \overset{\circ}{+} y)\right) \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2}.$$

Приклад 1. Доведемо справедливість першої формули

$$\sin_{0}(x \overset{\circ}{+} y) = \sin_{0} x \circ \cos_{0} y \overset{\circ}{+} \cos_{0} x \circ \sin_{0} y,$$

використовуючи ряди (20), (21).

Ряд з лівої частини формули має вигляд

$$\sin_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = x \overset{\circ}{+} y \overset{\circ}{-} (1 \overset{\circ}{\circ} 3!) \circ (x \overset{\circ}{+} y)^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} \ldots = x \overset{\circ}{+} y \overset{\circ}{-} (1 \overset{\circ}{\circ} 3!) \circ x^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{-} (1 \overset{\circ}{\circ} 3!) \circ y^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{-} x^{\overset{\circ}{2}} \circ y \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{-} x \circ y^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} \ldots.$$

Для правої частини отримуємо

$$\sin_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y + \cos_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y = \left(\left(x \overset{\circ}{-} (1^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{3}!) \circ x^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} \ldots\right) \circ \left(1 \overset{\circ}{-} y^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} \ldots\right) \overset{\circ}{+} \left(1 \overset{\circ}{-} x^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} \ldots\right) \circ \left(y \overset{\circ}{-} (1^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{3}!) \circ y^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} \ldots\right)\right) =$$

$$= x \overset{\circ}{+} y \overset{\circ}{-} x \circ y^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{-} (1^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{3}!) \circ x^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{-} (1^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{3}!) \circ y^{\overset{\circ}{3}} - x^{\overset{\circ}{2}} \circ y \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} \ldots,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 2. Доведемо формулу

$$\sin_{\circ} x \overset{\circ}{+} \sin_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \sin_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y)^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}\right) \circ \cos_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y)^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}\right).$$

Для цього запишемо дві складові формули

$$\sin_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{+} \beta) = \sin_{\circ} \alpha \circ \cos_{\circ} \beta \overset{\circ}{+} \cos_{\circ} \alpha \circ \sin_{\circ} \beta;$$

$$\sin_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{-} \beta) = \sin_{\circ} \alpha \circ \cos_{\circ} \beta \overset{\circ}{-} \cos_{\circ} \alpha \circ \sin_{\circ} \beta,$$

складемо почленно записані формули

$$\sin_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{+} \beta) + \sin_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{-} \beta) = \overset{\circ}{2} \circ \sin_{\circ} \alpha \circ \cos_{\circ} \beta.$$

Позначимо $(\alpha \overset{\circ}{+} \beta) = x$, $(\alpha \overset{\circ}{-} \beta) = y$, тоді $\alpha = (x \overset{\circ}{+} y)^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}$, $\beta = (x \overset{\circ}{-} y)^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}$. Підставимо замість α та β їх вирази через *x* та *y*, отримаємо вихідну формулу.

Приклад 3. Доведемо також формулу

$$\sin_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y = \left(\cos_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{-} \cos_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y)\right)^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}.$$

Як і раніше запишемо дві складові формули

$$\cos_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y) = \cos_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{+} \sin_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y;$$

$$\cos_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = \cos_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{-} \sin_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y.$$

Віднімаємо формули почленно

$$\cos_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{-} \cos_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = \cos_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{+} \sin_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y \overset{\circ}{-} \cos_{\circ} x \circ \cos_{\circ} y \overset{\circ}{+} \sin_{\circ} x \circ \sin_{\circ} y$$

і, спростивши праву частину, отримуємо вихідну формулу.

3. Релятивістські гіперболічні функції

Використовуючи релятивістську функцію $\exp_{\circ}(x)$ можна записати формули для релятивістських гіперболічних функцій $\mathrm{sh}_{\circ} x$, $\mathrm{ch}_{\circ} x$, $\mathrm{th}_{\circ} x$, $\mathrm{cth}_{\circ} x$:

а) гіперболічний синус

$$\mathrm{sh}_{\circ} x = \left[\exp_{\circ} x \overset{\circ}{-} \exp_{\circ}(\overset{\circ}{-} x)\right]^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}; \tag{22}$$

б) гіперболічний косинус

$$\mathrm{ch}_{\circ} x = \left[\exp_{\circ} x \overset{\circ}{+} \exp_{\circ}(\overset{\circ}{-} x)\right]^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}; \tag{23}$$

в) гіперболічний тангенс [3]

$$\mathrm{th}_{\circ} x = \mathrm{sh}_{\circ} x \overset{\circ}{\circ} \mathrm{ch}_{\circ} x = \left(\exp_{\circ} x \overset{\circ}{-} \exp_{\circ}(\overset{\circ}{-} x)\right)^{\circ}_{\circ}\left(\exp_{\circ} x \overset{\circ}{+} \exp_{\circ}(\overset{\circ}{-} x)\right); \tag{24}$$

г) гіперболічний котангенс

$$\mathrm{cth}_{\circ} x = \mathrm{ch}_{\circ} x \overset{\circ}{\circ} \mathrm{sh}_{\circ} x = \left(\exp_{\circ} x \overset{\circ}{+} \exp_{\circ}(\overset{\circ}{-} x)\right)^{\circ}_{\circ}\left(\exp_{\circ} x \overset{\circ}{-} \exp_{\circ}(\overset{\circ}{-} x)\right). \tag{25}$$

Представляючи релятивістську експоненту у вигляді ряду

$$\exp_{\circ} x = 1 \overset{\circ}{+} x \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ} 2!) \circ x^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ} n!) \circ x^{\overset{\circ}{n}} \overset{\circ}{+} \ldots,$$

можна записати ряди для $\mathrm{sh}_{\circ} x$, $\mathrm{ch}_{\circ} x$:

$$\mathrm{sh}_{\circ} x = x \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ} 3!) \circ x^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ} 5!) \circ x^{\overset{\circ}{5}} \overset{\circ}{+} \ldots \tag{27}$$

$$\mathrm{ch}_{\circ} x = x \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ} 2!) \circ x^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ} 4!) \circ x^{\overset{\circ}{4}} \overset{\circ}{+} \ldots \ldots \tag{28}$$

Похідні від релятивістських гіперболічних функцій

$$(\mathrm{sh}_{\circ} x)^{\circ'} = \mathrm{ch}_{\circ} x; \quad (\mathrm{ch}_{\circ} x)^{\circ'} = \mathrm{sh}_{\circ} x; \quad (\mathrm{th}_{\circ} x)^{\circ'} = 1^{\circ}_{\circ} \mathrm{ch}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x; \quad (\mathrm{cth}_{\circ} x)^{\circ'} = \overset{\circ}{-} 1^{\circ}_{\circ} \mathrm{sh}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x. \tag{29}$$

Основні співвідношення між гіперболічними функціями

$$\mathrm{ch}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x \overset{\circ}{-} \mathrm{sh}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x = 1; \tag{30}$$

$$\mathrm{sh}_{\circ}(\overset{\circ}{2} \circ x) = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ} x \circ \mathrm{ch}_{\circ} x; \tag{31}$$

$$\mathrm{ch}_{\circ}(\overset{\circ}{2} \circ x) = \mathrm{sh}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x \overset{\circ}{+} \mathrm{ch}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x. \tag{32}$$

1) Формули додавання й віднімання:

$$\mathrm{sh}_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = \mathrm{sh}_{\circ} x \circ \mathrm{ch}_{\circ} y \overset{\circ}{+} \mathrm{ch}_{\circ} x \circ \mathrm{sh}_{\circ} y;$$

$$\mathrm{sh}_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y) = \mathrm{sh}_{\circ} x \circ \mathrm{ch}_{\circ} y \overset{\circ}{-} \mathrm{ch}_{\circ} x \circ \mathrm{sh}_{\circ} y;$$

$$\mathrm{ch}_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = \mathrm{ch}_{\circ} x \circ \mathrm{ch}_{\circ} y \overset{\circ}{+} \mathrm{sh}_{\circ} x \circ \mathrm{sh}_{\circ} y;$$

$$\mathrm{ch}_{\circ}(x \overset{\circ}{-} y) = \mathrm{ch}_{\circ} x \circ \mathrm{ch}_{\circ} y \overset{\circ}{-} \mathrm{sh}_{\circ} x \circ \mathrm{sh}_{\circ} y.$$

2) Формули перетворення суми й різниці на доданок:

$$\mathrm{sh}_{\circ} x \overset{\circ}{+} \mathrm{sh}_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right) \circ \mathrm{ch}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right);$$

$$\mathrm{sh}_{\circ} x \overset{\circ}{-} \mathrm{sh}_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right) \circ \mathrm{ch}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right);$$

$$\mathrm{ch}_{\circ} x \overset{\circ}{+} \mathrm{ch}_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{ch}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right) \circ \mathrm{ch}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right);$$

$$\mathrm{ch}_{\circ} x \overset{\circ}{-} \mathrm{ch}_{\circ} y = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right) \circ \mathrm{sh}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{:}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right).$$

Приклад 1. Доведемо, що

$$\mathrm{ch}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x \overset{\circ}{-} \mathrm{sh}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x = 1.$$

Диференціюючи функцію $y = \mathrm{ch}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x \overset{\circ}{-} \mathrm{sh}^{\overset{\circ}{2}}_{\circ} x$, отримуємо

$$y^{\circ'} = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{ch}_{\circ} x \circ \mathrm{sh}_{\circ} x \overset{\circ}{-} \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ} x \circ \mathrm{ch}_{\circ} x \equiv 0$$

з правою частиною (30) $(\mathrm{const})^{\circ'} = 0$.

Приклад 2. Для доведення співвідношення (31) перемножуємо ряди для $\mathrm{sh}_{\circ} x$ і $\mathrm{ch}_{\circ} x$ і знаходимо ряд для функції $(1^{\circ}_{\circ} \overset{\circ}{2}) \circ \mathrm{sh}_{\circ}(2 \circ x)$. Останній можна отримати із ряду (27), підставляючи $\overset{\circ}{2} \circ x$ замість x. Отже, отримуємо, що $\mathrm{sh}_{\circ}(\overset{\circ}{2} \circ x) = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ} x \circ \mathrm{ch}_{\circ} x$.

Приклад 3. Співвідношення (32) приводиться до співвідношення (31) шляхом знаходження похідної від лівої та правої частин, а далі – те саме, що й у прикладі 2.

Приклад 4. Доведемо справедливість співвідношення $\mathrm{sh}_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = \mathrm{sh}_{\circ}x \circ \mathrm{ch}_{\circ}y \overset{\circ}{+} \mathrm{ch}_{\circ}x \circ \mathrm{sh}_{\circ}y$, використовуючи ряди (27), (28).

Ряд для лівої частини має вигляд

$$\mathrm{sh}_{\circ}(x \overset{\circ}{+} y) = x \overset{\circ}{+} y \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ}\overset{\circ}{3}!) \circ (x \overset{\circ}{+} y)^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} \ldots = x \overset{\circ}{+} y \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ}\overset{\circ}{3}!) \circ x^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ}\overset{\circ}{3}!) \circ y^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} x^{\overset{\circ}{2}} \circ y \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} x \circ y^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} \ldots .$$

Для правої частини отримуємо

$$\mathrm{sh}_{\circ}x \circ \mathrm{ch}_{\circ}y \overset{\circ}{+} \mathrm{ch}_{\circ}x \circ \mathrm{sh}_{\circ}y = x \overset{\circ}{+} y \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ}\overset{\circ}{3}!) \circ x^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} (1^{\circ}_{\circ}\overset{\circ}{3}!) \circ y^{\overset{\circ}{3}} \overset{\circ}{+} x^{\overset{\circ}{2}} \circ y \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} x \circ y^{\overset{\circ}{2}} \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2} \overset{\circ}{+} \ldots ,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 5. Доведемо співвідношення

$$\mathrm{sh}_{\circ}x \overset{\circ}{+} \mathrm{sh}_{\circ}y = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right) \circ \mathrm{ch}_{\circ}\left((x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2} \right).$$

Запишемо два доведені співвідношення:

$$\mathrm{sh}_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{+} \beta) = \mathrm{sh}_{\circ}\alpha \circ \mathrm{ch}_{\circ}\beta \overset{\circ}{+} \mathrm{ch}_{\circ}\alpha \circ \mathrm{sh}_{\circ}\beta ;$$

$$\mathrm{sh}_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{-} \beta) = \mathrm{sh}_{\circ}\alpha \circ \mathrm{ch}_{\circ}\beta \overset{\circ}{-} \mathrm{ch}_{\circ}\alpha \circ \mathrm{sh}_{\circ}\beta .$$

Складемо почленно записані співвідношення, отримаємо

$$\mathrm{sh}_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{+} \beta) \overset{\circ}{+} \mathrm{sh}_{\circ}(\alpha \overset{\circ}{-} \beta) = \overset{\circ}{2} \circ \mathrm{sh}_{\circ}\alpha \circ \mathrm{ch}_{\circ}\beta .$$

Скориставшись позначеннями $\alpha \overset{\circ}{+} \beta = x$, $\alpha \overset{\circ}{-} \beta = y$, $\alpha = (x \overset{\circ}{+} y) \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2}$, і $\beta = (x \overset{\circ}{-} y) \overset{\circ}{+}_{\circ} \overset{\circ}{2}$, що застосовуються у прикладі 2 другого розділу, отримаємо вихідне співвідношення.

Висновки

Досліджено релятивістську формулу *n*-арного додавання, запропоновану В. Л. Рвачовим. Визначено структуру релятивістського ряду, тобто ряду з максимальним числом. Представлено релятивістську тригонометрію, яка включає формули: додавання; перетворення суми тригонометричних функцій на добуток; перетворення добутку тригонометричних функцій на суму. За допомогою релятивістської експоненти отримано формули релятивістських гіперболічних функцій і виписано їх властивості. Деякі приклади застосування релятивістського обчислення для опису фізичних законів в умовах неархімедового Всесвіту наведено в роботах [5, 6].

Література

1. Рашевский П. К. О догмате натурального ряда. *Успехи математических наук*. 1973. Т. 28. Вып. 4 (172). С. 243–246.
2. Рвачев В. Л. Релятивистский взгляд на развитие конструктивных средств математики. Харьков, 1990. 44 с.
3. Рвачев В. Л. Неархимедова арифметика и другие конструктивные средства математики, основанные на идеях специальной теории относительности. *Доклады Академии наук СССР*. 1991. Т. 316. № 4. С. 884–889.
4. Рвачев В. Л. Релятивистское и другие неархимедовы исчисления. Харьков, 1992. 47 с.
5. Avinash K., Rvachev V. L. Non-Archimedean algebra: Applications to cosmology and gravitation. *Foundations of Physics*. 2000. Vol. 30. P. 139–152. https://doi.org/10.1023/A:1003647210704.
6. Rvachev V. L., Avinash K. Quadratic red shift law and the non-Archimedean Universe. *Radio Physics and Radio Astronomy*. 2001. Vol. 6. No. 2. P. S34–S36. https://doi.org/10.15407/rpra.

Надійшла до редакції 01.06.2026